

kwartalnik nr 1 (6) styczeń 2004

ISSN 1643-9481

indeks 372366

cena 5 zł (0% VAT)

magazyn miłośników matematyki



Logika militarna

- Panowie podoficerowie,
widoczną tu górę przestrzelić można pod kątem,
którego sinus jest równy półtora.
- Obywatelu kapitanie, mnie zawsze uczono,
że sinus nie przekracza 1.
- W zasadzie, podchorąży, to macie rację,
ale w warunkach bojowych wszystko jest możliwe.

Izaak Newton w liście do zaprzyjaźnionego z nim generała:
Opowiadają tu, że wygrałeś dwie bitwy i podobno zostałeś zabity.
Napisz mi, proszę Cię usilnie, ile w tym prawdy!
Chyba wiesz dobrze, jak zmartwiłaby mnie Twoja śmierć.

W bazie NASA po wystaniu załogi na Księżyc
odpowiedzialny za całą misję oficer
zadał komputerowi wojskowemu pytanie:

„Czy załoga wyląduje bezpiecznie na księżycu
i czy nie zdarzy się żadna awaria
podczas lądowania z powrotem na Ziemi?”.

Komputer dał odpowiedź: „Tak”.

– Co „tak”? – zapytał zdenerwowany i zdumiony oficer.

– Tak jest, sir! – odpowiedział komputer.

The Inverse Military Law

*General study is useful but major study is more
important and private study is the most important of all.*

Spytano kiedyś Einsteina,

co myśli o ewentualności trzeciej wojny światowej
i jaka broń będzie dla tej wojny charakterystyczna.

– Postęp w tej dziedzinie jest tak zadziwiająco szybki,
że nie mógłbym uczciwie odpowiedzieć na to pytanie – rzekł uczony.
Natomiast z całą pewnością mogę stwierdzić,
że czwarta wojna światowa odbędzie się na maczugi i kamienie.

Drodzy Czytelnicy!

Oddajemy Wam do rąk pierwszy w tym roku numer
MMM. Staraliśmy się, aby zarówno najmłodszy, jak
i bardziej zaawansowani miłośnicy matematyki mogli
znaleźć w nim dla siebie coś ciekawego.

Znaczną część numeru zajmują doniesienia o konkur-
sach matematycznych. Zachęcamy do udziału w nich
oraz informujemy o sukcesach naszych reprezentantów.
Przy okazji zapraszamy do udziału w konkursie zada-
niowym MMM o zmienionym regulaminie. Chcemy
promować jego stałych i wytrwałych uczestników. Poza
tym polecamy też nasz Konkurs Noworoczny.

W dziale „Etiudy geometryczne” sporo miejsca poświęca-
my zadaniom konstrukcyjnym. To dość zapomniany dział
szkolnej matematyki, a z pewnością wart odkurzenia.
Z nowości pojawia się dział „Z matematycznego lamusa”,
w którym prezentować będziemy teksty o historii matema-
tyki i sylwetkach jej badaczy. Zaczynamy jednak od przed-
stawienia pewnego konkursu i autora jego sukcesu.

Przepraszamy autorów, którzy długo oczekują na pu-
blikację nadesłanych prac. MMM jest kwartalnikiem
i ma tylko 40 stron niewielkiego formatu.

Wszystkim naszym Czytelnikom, i dużym, i mniejszym,
życzymy wspaniałego Nowego Roku i tego, żeby matema-
tyka stała się dla nich tym, czym może być: źródłem
radości poznania i osobistej satysfakcji.

Redakcja

W numerze:

Matematyczne zmagania

Paryż zaprasza mistrzów	2
Michał Sliwiński, Tadeusz Rams	
Matematyka bez granic	4
Adam Smólski	
Lwy fizyki	7
Nasi (znowu!) górą	8
Antoni Dindorf	
Pytania (nieco) przewrotne	12
Etiudy geometryczne	
Piotr Olszowiec	
Mierzenie pól cyrklem i linijką	16
Michał Pilipczuk	
Wirujące trójkąty	19
Samouczek zadaniowy	
Dorota Kolany	
Piszemy jedna za drugą... ..	20
Eugeniusz Sikorski	
Równania funkcyjne	23
Z życia liczb	
Pierwszy gigant (opr. MM, MŚ)	26
Z matematycznego lamusa	
Krzysztof Ciesielski	
Rozkosze łamania Głowy	28
Zrób sobie bryłkę	
Piotr Pawlikowski	
Opakowania i inne rombościany	30
Z notatnika starego belfra	
Antoni Dindorf	
Dobry wyzysk nie jest zły	33
Miedzy nami, szperaczami	
Forum Czytelników	35
Łamanie głowy, czyli burza w mózgu	
Zadania konkursowe	35
Wyniki i podpowiedzi	38

mmm Magazyn Miłośników Matematyki 1/2004

<http://www.atut.ig.pl/mmm>

ISSN 1643-9481, NAKŁAD 5000 egz.

WYDAWCA: Oficyna Wydawnicza ATUT – Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe

RADA REDAKCYJNA

Rościszewski Rabczuk, Zbigniew
Romanowicz, Sławomir Suchanowski

REDAKCJA

Małgorzata Mikołajczyk (redaktor
naczelny), Michał Sliwiński

PROJEKT OKŁADKI

Adam Łowczycki, Ewa Karolczak

MENEDŻER TYTUŁU

Krzysztof Skwark

SKŁAD I ŁAMANIE

Sigma – Ewa Karolczak
53-149 Wrocław, ul. Raclawicka 11/6

ADRES REDAKCJI

Magazyn Miłośników Matematyki
50-010 Wrocław, Podwale 62
tel. (0-71) 342 20 56
e-mail: mmm@atut.ig.pl

WARUNKI PRENUMERATY

Koszt prenumeraty równa się liczbie za-
mawianych numerów pisma pomnożo-
nej przez cenę pojedynczego numeru
(5 zł). Każda wpłata powinna mieć ad-
notację, których numerów dotyczy, oraz
zawierać adres zamawiającego. Można
zamawiać również numery archiwalne.

Należność prosimy wpłacać na konto:

Oficyna Wydawnicza ATUT
Wrocławskie Wydawnictwo Oświatowe
50-010 Wrocław, Podwale 62
BZ WBK I O/Wrocław
24 1090 2398 0000 0006 0802 5123

Zastrzegamy sobie prawo skracania i redagowania nadsyłanych tekstów. Tytuły
pochodzą od redakcji. Niezamówionych materiałów nie zwracamy.

Zapraszamy do współpracy! Redakcja

Paryż zaprasza mistrzów



W grudniu 2003 r. upłynął termin przysyłania zadań eliminacyjnych do II Międzynarodowych Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych stanowiących jednocześnie eliminacje krajowe do XVIII Mistrzostw Międzynarodowych. Wyniki etapu eliminacyjnego podamy w następnym numerze, a teraz prezentujemy obiecany ostatnio wybór zadań z drugiego dnia ubiegłorocznego finału paryskiego.

<http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html>

Poranny dylemat

Tego ranka nie wiem, jak się mam ubrać. Do wyboru mam sukienkę, spódnicę, bluzkę i cztery pary butów. **Na ile różnych sposobów mogę się ubrać?**



Matematyczna broszura

Nauczycielka wydrukowała zadania na kółko matematyczne. Każdy uczeń otrzymał pięć dwustronnych kserokopii, które złożył na pół tak, że powstała dwudziestostronicowa książeczka. Jacek ponumerował jej strony, umieszczając nr 1 na okładce broszury. Potem kartki mu się rozsypały. Oto widok jednej kartki. **Jaki jest numer strony znajdującej się po lewej?**

Słodka etykieta

Na słoiku kremu z jadalnych kasztanów umieszczono następujące informacje:

zawartość miąższu kasztanowego w 100 g kremu – 50 g,

zawartość cukru w 100 g kremu – 60 g.

Czytamy tam również, że oprócz aromatu waniliowego (o masie do pominięcia) jedynymi składnikami kremu są miąższ kasztanowy i cukier. **Jaki jest procent cukru zawartego w miąższu kasztanowym?**

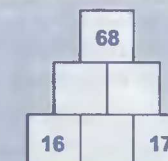


Wyprzedaż

Kasia ma bon upoważniający do 30% zniżki przy jednoczesnym zakupie trzech towarów. Przy kasie Kasia odliczyła do zapłaty 168 euro i wtedy sprzedawczyni powiedziała jej, że kupując jeszcze czwarty artykuł może na ten bon otrzymać 40% zniżki. Kasia nie miała już więcej pieniędzy, jednak szybko obliczyła, że może kupić jeszcze czwarty towar wraz z trzema, które już wcześniej wybrała. **Ile może maksymalnie kosztować ta dodatkowa rzecz?**

Liczbowa piramida

Każda liczba zapisana na cegle jest iloczynem dwóch liczb z cegieł, które ją podtrzymują. **Jakiej liczby brakuje w dolnym rzędzie?**



Tajne hasło

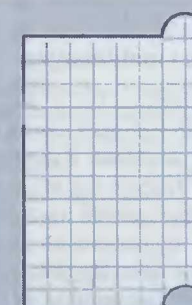
Ze względów bezpieczeństwa hasło dostępu do komputera jest codziennie zmieniane. Dzisiejsze jest liczbą czterocyfrową, której zapis nie zaczyna i nie kończy się zerem. Liczba ta jest kwadratem, a jej cyfry mają jednakową parzystość. **Jakie jest dzisiejsze hasło?**

Zabawy na wodzie

Mateusz i Matylda puszczają motorówki w prostokątnym basenie o wymiarach 6,5 m × 15,6 m. Motorówka Mateusza startuje z rogu basenu i porusza się po jego przekątnej ze stałą prędkością 50 cm/s. W tym samym momencie Matylda puszcza swój ścigacz z sąsiedniego rogu, po linii prostopadłej do toru motorówki Mateusza. **Z jaką stałą prędkością powinna wypuścić ścigacz Matylda, aby przejąć motorówkę Mateusza?**

Ogród ojca Izydora

Ojciec Izydor posiadał ogród mający kształt pokazany na rysunku, a w nim znajdowało się źródło (na rysunku niezaznaczone). W testamencie pozostawił następujące instrukcje: ogród ma być podzielony na cztery części, tak aby każdy z moich czterech synów otrzymał parcelę tej samej powierzchni i tego samego kształtu. Ponadto każdy ma mieć bezpośredni dostęp do źródła. **Jak przeprowadzić ten podział?**



Kodowanie

$$CI + CI = LY$$

$$CIJM + CIJM = JMLY$$

W tych dwóch równościach ta sama litera zastępuje zawsze tę samą cyfrę, ale ta sama cyfra może być zastępowana różnymi literami. Żadna liczba nie zaczyna się cyfrą 0. **Ile wynosi CIJM?**



Na rozwiązania zadań czekamy do końca marca.

Matematyka bez granic

O Międzynarodowym Konkursie Matematycznym „Mathematics Without Limits” pisaaliśmy już w MMM nr 2/2003. Poniżej prezentujemy wybór zadań z kolejnej edycji tego konkursu oraz przedstawiamy inny konkurs organizowany pod bliźniaczą nazwą „Mathématiques sans frontières”.

Mathematics Without Limits

W dniach 23–26 października 2003 w tureckim Izmirze odbył się III Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez granic”. Zawody te odbywają się od trzech lat, dotychczas na zmianę w Turcji i Bułgarii. Prowadzone są rozmowy, aby jedna z kolejnych edycji miała miejsce w Polsce. Jeśli pomysł wypali, MMM obejmie patronat nad tą imprezą.

W tegorocznym konkursie startowało 56 uczniów. Turcja i Bułgaria wystawiły po kilka drużyn, a pozostałe kraje (Polska, Grecja, Indonezja i Nowa Zelandia) – po jednej. Polskę reprezentowała grupa uczniów z LO nr III we Wrocławiu. Koszty pobytu tradycyjnie pokrywali organizatorzy, a przelot polskiej ekipy sfinansował Urząd Miejski Wrocławia.

Turcy przyjęli gości bardzo serdecznie, zapewniając wiele atrakcji. Była wycieczka do Efezu, zwiedzanie plantacji winogron, świątyń i lokalnych warsztatów rzemieślniczych. Do szczególnych atrakcji należały zakupy na tureckich bazarach. Mimo pewnych kłopotów z porozumieniem atmosfera była bardzo przyjazna i na pewno wszyscy miło wspominają ten wyjazd.

Zawodnicy podzieleni byli na trzy kategorie wiekowe: 11–12, 13–15 i 16–18 lat. Do rozwiązywania mieli w zależności od kategorii 10 lub 12 spośród 15 zadań, w tym 13 zadań testowych, jednokrotnego wyboru po 2 punkty (za niepoprawne odpowiedzi otrzymywało się punkty ujemne), a dwa – otwarte, po 4 punkty. Na rozwiązywanie uczniowie mieli 150 minut. Treści podane były po angielsku. Najlepsi w najstarszej kategorii okazali się Turcy, w obu pozostałych Bułgarzy.

Na następnej stronie zamieszczamy wybrane zadania z tych zawodów (przerobione na wersję otwartą).

Michał Śliwiński

Wyłowione z sieci (1)

Origami i matematyka

<http://www1.zetosa.com.pl/~burezyk/>

Origami to japońska sztuka wykonywania składanek z wygłanego papieru. Nadaje się im rozmaite kształty, przeważnie kwiatów, ptaków lub stylizowanych zwierząt. Jednak nie tylko. Mogą to być również skomplikowane bryły i łamiągłówki matematyczne tworzone ze specjalnych modułów bez użycia kleju. Na tej stronie można znaleźć informacje, jak wykonać w tej technice wielościłany platoński, archimedesowe oraz wiele innych niezwykłych brył. Są także odnośniki do innych stron związanych z matematycznym origami.

cd. u. 2³

Sztafeta pokoleń

Zadania z kurantem

Gdy stary zegar dziadka wybija godzinę szóstą, między pierwszym a ostatnim uderzeniem mija 15 sekund. Ile czasu mija między pierwszym a ostatnim uderzeniem, gdy wybija północ?

U zegarmistrza Cykora właśnie biją trzy zegary. Dwa z nich wskazują prawidłowy czas, a trzeci spóźnia się o godzinę. Suma godzin, które wybiły, wynosi 14. Która jest godzina?

Roztargniony profesor Sędziwy wybrał się na spacer po Starówce bez zegarka. W pewnej chwili zegary na wieży ratusza i katedry zaczęły jednocześnie wybijać godzinę. Zegar ratuszowy bije co 2 sekundy, a katedralny co 3 sekundy. Profesor usłyszał sześć uderzeń. Która była wtedy godzina?

W pewnym mieście dwa zegary wybijają godzinę. Pierwszy zegar uderza co 3 sekundy, a drugi uderza regularnie w odstępach krótszych, ale zawsze rozpoczyna wybijanie godziny o 2 sekundy później niż pierwszy. O godzinie trzeciej w nocy Janek usłyszał 5 uderzeń. Co ile sekund powtarzają się uderzenia drugiego zegara?

Odpowiedzi szukajcie wewnątrz numeru.

1. W samolocie są 62 rzędy po 6 siedzeń. Pasażerowie zajęli miejsca w ten sposób, że w żadnym rzędzie układ zajętych miejsc nie wygląda tak samo. Ilu mogło być najwyżej pasażerów?

2. W III Międzynarodowej Konferencji Paleoantropologicznej w Turku wzięło udział 281 paleoantropologów z 7 krajów. Zaobserwowano tam dziwny fakt: wśród dowolnych 6 uczestników konferencji są co najmniej dwie osoby w tym samym wieku. Znajdź największe takie n , by wśród uczestników konferencji na pewno istniało n osób tej samej płci, z tego samego kraju i w tym samym wieku.

3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo przedstawiając litery wyrazu CASABLANCA otrzymamy układ, w którym przed pierwszym C będą co najmniej dwa A?

4. W trójkącie ABC ($AB > AC$) dwusieczne kątów B i C przecinają boki trójkąta odpowiednio w punktach P i Q . Niech I oznacza punkt przecięcia tych dwusiecznych. Znajdź miarę kąta A , jeśli wiadomo, że $IP = IQ$.

5. Znajdź wzór na sumę $1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$.

6. Rozwiąż równanie $[x] + [x + \frac{1}{2}] + [x + \frac{2}{3}] = 2003$. (Przez $[a]$ oznaczamy część całkowitą liczby rzeczywistej a , czyli największą liczbę całkowitą nie większą od a).

7. Udowodnij, że $\cos \frac{3\pi}{10}$ jest jedyną liczbą spełniającą równanie $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

8. Niech a i b będą przyprostokątnymi, a c – przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego. Jakie są możliwe wartości wyrażenia $\frac{c}{a+b} + \frac{ab}{c^2}$?

9. Jaka największą liczbę czterocyfrowych numerów telefonicznych można utworzyć z cyfr 1, 2 i 3, tak żeby dowolne dwa spośród nich miały na najwyżej jednej pozycji tę samą cyfrę?

10. Niech AB będzie średnicą okręgu O , a IA i IB – stycznymi do O odpowiednio w A i B . Punkt przecięcia BC i IA oznaczmy przez K . Niech H będzie punktem wspólnym dwusiecznej kąta CAK i prostej CK , M – środkiem łuku BAC , S – drugim punktem wspólnym HM i O , a T – punktem przecięcia IB i stycznej do O w M . Pokaż, że K , S i T są współliniowe.

11. P jest punktem wewnętrznym danego koła. Dla każdej jego cięciwy AB zawierającej P prowadzimy w punktach A i B styczne, odpowiednio t_A i t_B . Niech M i N będą rzutami prostokątnymi P odpowiednio na t_A i t_B . Udowodnij, że wartość $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN}$ nie zależy od wyboru cięciwy AB .



Na rozwiązania zadań czekamy do końca marca.

Mathématiques sans frontières

Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez granic” organizowany jest w krajach Europy Zachodniej od 1989 r. (Komitet Główny konkursu ma siedzibę w Strasburgu). W ostatnich latach brało w nim udział prawie 100 tys. młodych ludzi z ponad 40 krajów UE, państw kandydujących oraz USA, Kanady i Meksyku. W zawodach startują całe klasy (III gimnazjów i I szkół ponadgimnazjalnych).

Criminal problem

A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted for 7 minutes. There are 4 suspects: Andrea, Bruce, Camilla and Dimitri. They are staying in 4 different rooms. Here are their statements to the police about their timetables between 10.00 and 10.15 p.m.:

A: First Bruce paid me a 3-minute-visit, then Dimitri came and stayed for 4 minutes, finally Camilla called me on the phone.

B: I went to see Andrea and then Dimitri, and with a click of the mouse, I sent an e-mail.

C: I watched the news on the TV until 10.05 p.m., then I called Andrea for 5 minutes.

D: I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes.

After checking on all the statements, the police inspector found the culprit. How did he manage?

Celem konkursu jest otwarcie wielu granic: między Francją i innymi krajami, między szkołami państwowymi, niepublicznymi i zakładami pracy (sponsorem konkursu), między matematyką, przyrodą i językami obcymi (jedno z zadań konkursowych podawane jest w językach angielskim, francuskim, niemieckim, włoskim lub hiszpańskim, a jego rozwiązanie również należy podać w wybranym języku obcym). Działania te mają podnieść zainteresowanie młodzieży matematyką, jej stopień opanowania języków obcych, umiejętność pracy w grupach oraz rozwijać inicjatywę i twórczą aktywność uczniów.

Polska była reprezentowana w konkursie od 1993 r. (początkowo na zasadzie eksperymentu przez uczniów szkół średnich dawnego woj. nowosądeckiego). Podczas Zjazdu Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Nowym Sączu we wrześniu 2001 roku postanowiono, że PTM obejmie patronat nad konkursem. Jego propagowanie i organizację na terenie kraju powierzono Sądeckiemu Oddziałowi PTM.

Konkurs wzbudza coraz większe zainteresowanie polskich uczniów, a liczba jego uczestników szybko rośnie (w 2001 r. – 500 osób, w 2002 r. – 1500, w 2003 r. – ponad 18 tys.).

Więcej informacji można znaleźć na stronie <http://www.ptmso.mnet.pl>.

Tadeusz Rams

KONKURS

TOWOTOWYMI
OBIBOKI WYMIOTAMI
WYMAWIAMY
ATOMOWYMI KOBIECIE
WYMIATAMY
AUTOTOMIA

odrzuć przez zwierzęta części ciała jako reakcja obronna.

W numerze 3/2003 ogłosiliśmy konkurs dla Czytelników na najdłuższy wyraz z osią symetrii.

Wśród nadesłanych słów pisanych pionowo z pionową osią symetrii najdłuższy miał 10 liter, a wśród pisanych poziomo z poziomą osią symetrii – 8 liter.

Zwyczają konkursu został **Piotr Pawlikowski** (Kluczbork). Ponadto nagrody książkowe otrzymują: **Aleksandra Duchowska** (Piotrków Trybunalski), **Aleksandra Ilkowiec** (Kluczbork).

Nasz konkurs trwa nadal! Do końca marca czekamy na najdłuższy wyraz pisany pionowo z poziomą osią symetrii oraz pisany poziomo z pionową osią symetrii. Ponadto na najdłuższe sensowne zdanie składające się z liter, z których każda z osobna ma środek symetrii.



Dziesięć lat temu odrodziła się niezależna Ukraina i odrodzenie to stało się bodźcem dla nowych, licznych inicjatyw w oświacie, nauce i kulturze. Pojawiły się szkoły nowego typu, między innymi przy potężnym wsparciu Lwowskiego Uniwersytetu Państwowego i okręgowego zarządu oświaty otwarto Lwowskie Liceum Matematyczno-Fizyczne – szkołę dla uzdolnionych uczniów regionu zachodniej Ukrainy. Idea tego liceum połączyła grupę ludzi – entuzjastów, romantyków, marzycieli, którzy uznali, że w okresie rewolucyjnych zmian w społeczeństwie w pierwszej kolejności należy zmieniać oblicze szkoły.

Dziś lwowskie liceum znane jest jako ośrodek, który organizuje na całą Ukrainę konkurs matematyczny „Kangur”. Począwszy od 2001 roku wykładowcy fizyki postanowili rozszerzyć doświadczenia zdobyte przy okazji „Kangury” i zorganizować uczniowski konkurs fizyczny. Dziś jest on już znany pod nazwą Ukraiński Konkurs Fizyczny „Lwiatko” – na cześć Lwowa. Konkurs odbywa się pod patronatem Ministerstwa Nauki i Oświaty Ukrainy. Może w nim wziąć udział każdy, kogo intrygują tajemnice natury, kto lubi myśleć i odgadywać, kto chce sprawdzić swoją wiedzę, intuicję i spostrzegawczość. W ubiegłym roku wzięło w nim udział ponad 5000 ukraińskich uczniów.

Polska edycja konkursu jest organizowana przez redakcję „Fizyki w Szkole” oraz I Społeczne LO w Warszawie. Zainaugurowana została próbnie w ubiegłym roku w dziesięciu szkołach. W tym roku konkurs jest otwarty. Mogą do niego przystąpić gimnazja, licea, licea profilowane i technika. Uczniowie podzieleni są na 5 kategorii (klasy I i II gimnazjum, III gimnazjum, I, II i III liceum). Każda kategoria rozwiązuje inny zestaw zadań testowych. Zasady są identyczne jak w „Kangurze matematycznym”.

W tym roku konkurs zostanie przeprowadzony 5 kwietnia 2004. Szkoły mogą zgłaszać uczestników najpóźniej do 31 stycznia 2004. Od każdego uczestnika pobierana jest opłata konkursowa w wysokości 5 zł.

Więcej informacji i testy z poprzednich lat można znaleźć na stronie: <http://slo.bednarska.edu.pl/lwiatko/>

Adam Smólski

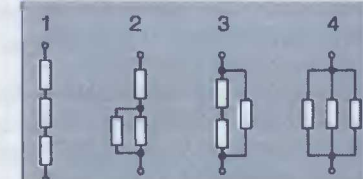
Ukraiński Konkurs Fizyczny „Lwiatko” (wzorowany na francuskim „Kangurze matematycznym”) organizowany przez Liceum Matematyczno-Fizyczne we Lwowie anonosiliśmy już w numerze 3/2003. Obok podajemy więcej szczegółów, a poniżej przykładowe zadania z zeszłorocznej edycji konkursu.



Dwie szklane butelki napełnione są całkowicie – pierwszą wodą, drugą rtęcią. Czy utoną, jeśli pierwszą włożymy do wody, a drugą do rtęci?

- A. 1 tak, 2 nie; B. 1 nie, 2 tak;
C. 1 tak, 2 tak; D. 1 nie, 2 nie;
E. Sytuacja nie jest możliwa, ponieważ szkło rozpuszcza się w rtęci.

Przez który z pokazanych odcinków obwodu przy takim samym napięciu popłynie największy prąd? Oporniki są jednakowe.



- A. 1; B. 2; C. 3; D. 4;
E. Wszędzie jednakowy.

Nasi (znowu!) górq

◆ W dniach 20–26 września 2003 r. w Budapeszcie odbył się finał XV edycji Konkursu dla Młodych Naukowców Unii Europejskiej. Ma on na celu zachęcanie młodzieży do zawodowego zajęcia się działalnością naukową oraz promowanie współpracy między młodymi badaczami z różnych krajów. Co roku przystępuje do niego ok. 30 tysięcy uczniów.

Pierwszy konkurs odbył się w 1989 r. w Brukseli (była to kontynuacja konkursu Philipsa organizowanego w latach 1968–88). Od tej pory finalistów gościli: Kopenhaga, Zurych, Sewilla, Berlin, Luksemburg, Newcastle, Helsinki, Mediolan, Porto, Saloniki, Amsterdam, Bergen i Wiedeń. Polska uczestniczy w nich od 1993 r.

W konkursie mogą brać udział licealiści i studenci w wieku 14–21 lat, przy czym prezentowana praca musi powstać przed podjęciem studiów. Projekty można opracowywać indywidualnie lub w zespołach co najwyżej trzyosobowych. Uczestnicy są nominowani do finału przez poszczególne kraje. Polskie eliminacje organizowane są przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci.

Zwycięzcy konkursu otrzymują nagrody pieniężne w wysokości: 5000 € (równorzędne trzy pierwsze miejsca), 3000 € (trzy drugie miejsca) i 1500 € (trzy trzecie miejsca) oraz stypendia i staże fundowane przez różne placówki naukowe. Te nagrody przyznaje międzynarodowe jury. Dodatkowe nagrody przyznaje grupa trzech laureatów konkursu z poprzednich lat (1200 € do podziału: 3 nagrody po 400 € lub jedna w wysokości 600 € i dwie po 300 €).

Od początku uczestnictwa w konkursie Polacy zdobyli łącznie 11 nagród głównych, w tym 2 pierwsze, 4 drugie i 5 trzecich. Aż pięciokrotnie nagradzane były nasze prace z dziedziny matematyki. W tym roku nagrody I stopnia zdobył jeden Węgier i dwóch Niemców. Wśród laureatów nagród II stopnia, obok Węgra i Czecha, znalazła się dwójka Polaków – bracia Łukasz i Mariusz Jaremkowie z Wrocławia. Tematem ich pracy była „Synteza hydrazyny p-aminofenylowego analogu immunosupresorowego fragmentu ubikwityny”. Więcej informacji o konkursie można znaleźć na stronach: <http://www.fundusz.org> i <http://europa.eu.int/comm/research/youngscientists/index2.htm>

◆ W dniach 31 października–4 listopada 2003 r. odbyły się w Rydze (Łotwa) XIV Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich – „Baltic Way 2003”. W zawodach uczestniczyły tradycyjnie delegacje Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski, Szwecji oraz miasta Petersburg (Rosja).

Pierwsze takie zawody odbyły się w 1990 r. pomiędzy trzema bałtyckimi republikami radzieckimi: Litwą, Łotwą i Estonią. Nazwa zawodów pochodzi od masowej demonstracji na rzecz niepodległości nadbałtyckich republik zorganizowanej w 1989 roku, kiedy to ponad milion ludzi stanęło trzymając się za ręce wzdłuż drogi łączącej Wilno z Rygą i Tallinem. Dwa lata później zmiany polityczne umożliwiły zaproszenie do uczestnictwa w konkursie drużyn z innych państw. Honorowo zaproszono reprezentację Islandii, państwa, które jako pierwsze uznało niepodległość Litwy, Łotwy i Estonii.

W zawodach biorą udział pięcioosobowe reprezentacje poszczególnych krajów złożone z uczniów szkół średnich. Zawody są drużynowe, uczestnicy rozwiązują wspólnie przez 4,5 godziny 20 zadań (po pięć z algebry, geometrii, kombinatoryki i teorii liczb). Zadania wybierane są spośród propozycji nadesłanych przez państwa uczestniczące w zawodach przez jury utworzone z opiekunów wszystkich delegacji. Za rozwiązanie każdego można otrzymać do 5 punktów (maksymalny wynik 100 punktów zdarzył się tylko raz w historii zawodów – w 2001 r. w Hamburgu wygrała drużyna z Izraela, który uczestniczył wtedy w zawodach po raz pierwszy, na specjalne zaproszenie gospodarzy).

Zwycięska drużyna otrzymuje puchar przechodni. Jury przyznaje czasem także wyróżnienia za wyjątkowo pomysłowe i eleganckie rozwiązania zadań.

Polska reprezentacja na te zawody nominowana jest przez Komitet Główny Olimpiady Matematycznej. W tym roku była to grupa w składzie: Piotr Danilewski (V LO Kraków), Michał Jaszczyk (XIII LO Szczecin), Tomasz Kuras (V LO Kraków), Stefan Łapicki (III LO Wrocław), Mateusz Michałek (V LO Kraków). Zajęła ona II miejsce, zdobywając w sumie 68 punktów (na 17 przedstawionych rozwiązań 12 uzyskało maksymalną ocenę, jedno – 4 pkt., dwa – 2 pkt. oraz dwa – 0 pkt.). Wygrała reprezentacja Petersburga z wynikiem 85 punktów. Zadania były jednak trudne i tylko cztery drużyny uzyskały powyżej połowy możliwych do zdobycia punktów.

Więcej informacji i zadania można znaleźć na stronie www.om.edu.pl/balt.html

◆ W poprzednim numerze pisaliśmy o studenckiej reprezentacji Polski, która w kwietniu 2003 zdobyła mistrzostwo świata w programowaniu zespołowym. Młodzi informatycy zostali zatrudnieni w centrum badawczo-rozwojowym firmy ComArch. Szefem Centrum został jeden z nich – Andrzej Gasiennica-Samek. Ośrodek zajmuje się projektowaniem nowych narzędzi programistycznych. Na początku grudnia inny z członków tej ekipy – student Uniwersytetu Warszawskiego, Tomasz Czajka zdobył tytuł najlepszego informatyka na świecie, wygrywając prestiżowy międzynarodowy konkurs w programowaniu indywidualnym „2003 TopCoder Open”.

TopCoder to swoista liga programistów. Co tydzień odbywają się kolejne rozgrywki. Przez 2 godziny zawodnicy rozwiązują postawione zadania, łącząc się przez Internet. Każdy mecz stanowi odrębną całość, ale prowadzone są łączne rankingi zawodników i państw (aktualnie Polska jest na I miejscu przed Niemcami i Szwecją). Dwa razy w roku organizowane są otwarte zawody. Startuje w nich kilka tysięcy uczestników z całego świata. Konkurs sponсорuje największy producent procesorów, INTEL.

Kółka olimpijskie

W wielu miejscowościach działają kółka matematyczne pomagające przygotować się do udziału w Olimpiadzie Matematycznej. Większość to kółka międzyszkolne, w których może uczestniczyć każdy chętny. Informacje o takich zajęciach można znaleźć na stronie internetowej

<http://www.impan.gov.pl/~kolka>

Wyłowione z sieci (2)

Encyklopedia ciągów

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/indexpolish.html>

Jest to rozszerzenie popularnej książkowej Encyklopedii Ciągów Liczb Całkowitych N.J.A. Sloane'a. Podając dowolny ciąg liczb, otrzymamy wyszukane przez system wszystkie ciągi kiedyś przez kogoś zdefiniowane zawierające zadany ciąg. Na przykład 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 to nie tylko początek ciągu Fibonacciego, ale także kilkudziesięciu innych znanych ciągów. Jest to wygodne narzędzie zarówno dla matematyków, jak i miłośników łamigłówek.

cd. s. $[\pi^2] + 14$

Jesienna edycja zawodów rozpoczęła się w październiku. Do rund eliminacyjnych dopuszczono 500 osób (po 200 wyłonionych w dwóch rundach kwalifikacyjnych i 100 z aktualnej czołówki ligi). Z kolejnych eliminacji do następnych przechodziło 200, 100, 50 i wreszcie 16 osób. Aby brać w nich udział, Tomek przez ostatnie kilka miesięcy musiał co tydzień wstawać o 2 w nocy, bo konkurs odbywał się w godzinach dogodnych dla Amerykanów.

Półfinałści spotkali się 4 grudnia w Mohegan Sun Casino w Uncasville w USA. Zawody rozgrywano w czterech czwórkach, a najlepszy zawodnik z każdej czwórki wchodził do finału. Finały rozegrano następnego dnia w tym samym miejscu. Tomek okazał się najlepszym z finałowej czwórki. Pulę nagród stanowiło 100 tys. dolarów, z czego połowę otrzymał zwycięzca. Na razie Tomek chce spokojnie skończyć studia, a pieniądze z nagrody przeznaczyć na studia doktoranckie w USA.

Więcej informacji o konkursie na stronie <http://www.topcoder.com>

Rozwiązania zadań z artykułu Mierzenie pól cyrklem i linijką



1. Kwadraturę dwóch kwadratów można wykonać, korzystając z tw. Pitagorasa. Potem powtarzamy konstrukcję dla tego nowego kwadratu i jednego z pozostałych itd.

2. Tu również można skorzystać z tw. Pitagorasa i dalej wg schematu (korzystając z tw. Talesa) podanego w artykule albo skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i również z tw. Talesa, aby skonstruować iloczyn dwóch odcinków (sumy i różnicy boków danych kwadratów), patrz rysunek.

3. Dwie metody: według tw. Talesa konstruujemy odcinek o długości będącej stosunkiem długości boków danych kwadratów (patrz rysunek), a następnie znajdujemy jej kwadrat (tak jak w artykule) albo konstruujemy odcinki o długościach równych połom obu kwadratów (jak w artykule), a potem wyznaczamy ilorz tych liczb zgodnie z rysunkiem.

4. Nietrudno pokazać (korzystając z tw. Pitagorasa), że półkola oparte na przyprostokątnych trójkąta mają w sumie pole równe polu dużego półkola. Pole księżyców Hipokratesa obliczamy odejmując od sumy pól tych małych półkoli pole dużego półkola pomniejszone o pole trójkąta. Zatem księżyce Hipokratesa trójkąta prostokątnego są połowo równoważne temu trójkątowi. Kwadratura księżyców sprowadza się więc do konstrukcji kwadratury trójkąta opisanej w artykule.

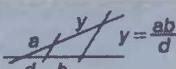
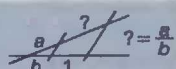
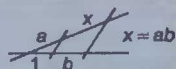
5. a) $\sqrt{n}$ możemy skonstruować jako średnią geometryczną odcinka o długości n (n -krotnie odłożony odcinek jednostkowy) i odcinka jednostkowego (konstrukcja opisana w artykule). Iloczyn dwóch odcinków konstruujemy, korzystając z tw. Talesa, jak w zadaniu 2.

b) Korzystając z tw. Pitagorasa, możemy skonstruować pomocnicze odcinki $y = \sqrt{a^2 + d^2}$ i $z = \sqrt{b^2 + c^2}$. Wtedy $x = \sqrt{y^2 - z^2}$, co też konstruujemy dzięki tw. Pitagorasa.

c) Możemy dwukrotnie skorzystać z tw. Talesa, w pierwszym kroku konstruując $y = \frac{ab}{d}$, a w drugim tak samo $x = \frac{yc}{e}$.

d) Korzystając z tw. Pitagorasa, konstruujemy pomocnicze odcinki $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ oraz $z = \sqrt{a^2 + b^2}$. Mamy: $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4} = \sqrt[4]{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} = \sqrt[4]{y^2 \cdot z^2} = \sqrt{yz}$, co umiemy już skonstruować (średnia geometryczna y i z).

W zadaniach 5. b) i 5. d) konstrukcja dla pewnych a, b, c, d może się nie udać, ale jest tak tylko wtedy, gdy wyrażenie opisujące x nie ma sensu.



ŁOWCY TALENTÓW – JERSZ



ul. Białowieska 50/26, 54-235 Wrocław
tel.fax (0-71) 326 70 73
tel. 0 501 101 866, 0 505 138 588
<http://www.mat.edu.pl>
e-mail: info@mat.edu.pl

Firma edukacyjna „Łowcy Talentów – JERSZ” działająca od 1994 roku proponuje:

♦ OGÓLNOPOLSKIE KONKURSY

- matematyczne (Alfik Matematyczny, MAT),
- humanistyczne (Alfik Humanistyczny, OMNIBUS),
- językowe (ENGLISH HIGH FLIER, ENGLISH ACE, DEUTSCHFREUND, SPRACHDOKTOR).

♦ OBOZY WYPOCZYNKOWO-NAUKOWE

„Konie, matematyka i języki” podczas wakacji dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów

- Bobowicko koło Międzyrzecza (województwo lubuskie),
- Serpice nad Bugiem (województwo mazowieckie).



♦ WŁASNE WYDAWNICTWA MATEMATYCZNE

Ostatnio ukazała się książka *Konkursy matematyczne dla gimnazjalistów* przeznaczona dla uczniów gimnazjum i starszych klas szkół podstawowych, dla których zmierzenie się z niestandardowymi problemami jest wyzwaniem i dobrą zabawą. Stanowi ona opracowanie zadań konkursu „Alfik Matematyczny”.

W przygotowaniu podobne opracowania dla uczniów klas III i IV i oraz V i VI szkół podstawowych.

♦ **KURSY I KÓŁKA** matematyczne i humanistyczne dla uczniów klas VI szkoły podstawowej oraz klas III gimnazjów.



Pełna informacja na stronie internetowej

www.mat.edu.pl

Pytania (nieco) przewrotne

Ostatnio w szkole wszechobecne jest testowanie wszelkich możliwych kompetencji i nie da się od tego uciec. I my chcielibyśmy zaproponować na półnietku roku szkolnego szybki test z matematyki. Jest on przeznaczony głównie dla tych, którzy nie lubią być testowani, dlatego zawiera odpowiedzi (które jednak można zakryć), a jego celem jest podawanie uzasadnień tych odpowiedzi. Test składa się ze 100 pytań, z czego pierwszych 70 nie wykracza poza poziom gimnazjum. Udzielenie 80% poprawnych odpowiedzi w ciągu 30 minut stanowi bardzo dobry wynik.

Poziom gimnazjalny

- | | |
|--------------------------|---|
| każdy | 1. Jaki prostokąt można wpisać w okrąg? |
| kwadrat | 2. Jaki romb można wpisać w okrąg? |
| każdy | 3. Jaki romb można opisać na okręgu? |
| $\frac{1}{100}$ | 4. Ile to jest 3% z $\frac{1}{3}$? |
| prostokątny | 5. Co to za trójkąt, którego długości boków wynoszą 6, 8, 10? |
| tak | 6. Czy to prawda, że x jest nie mniejsze od x ? |
| $5k+3, k \in \mathbb{C}$ | 7. Jak zapisać symbolicznie liczbę, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3? |
| $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ | 8. Jakie jest rozwiązanie nierówności $x^2 < 2$? |
| przeciwną do x | 9. Jaką liczbę oznacza symbol „ $-x$ ”? |
| $a = 0$ i $b \neq 0$ | 10. Kiedy $\frac{a}{b} = 0$? |
| tak | 11. Czy liczba może być mniejsza niż jej połowa? |
| tak | 12. Czy liczba może być taka sama, jak jej ćwiartka? |
| $y = 0$ | 13. Wykresem jakiej funkcji może być oś układu współrzędnych XOY? |
| tak | 14. Czy liczba x może być mniejsza niż $-x$? |
| $\frac{5}{7}$ | 15. Przez jaką liczbę trzeba pomnożyć 7, aby dostać 5? |
| prostokątny | 16. Jaki to trójkąt, w którym środek okręgu opisanego jest środkiem boku? |
| $\sqrt{2}$ | 17. Jaki bok ma kwadrat, którego przekątna ma długość 2? |
| nie | 18. Czy a i $\sqrt{a^2}$ to to samo? |
| $n = 3$ | 19. Kiedy prawdziwe jest zdanie „ n -kąt nie może być wklęsły”? |
| przeciwne | 20. Jakie to liczby, których suma jest 0? |

21. Jakie to liczby, których iloczyn jest 1?
22. Jakie to liczby, których iloczyn jest ujemny?
23. Jakie to liczby naturalne, których suma jest nieparzysta?
24. Ilucyfrową liczbą jest 48 w systemie dwójkowym?
25. Ilucyfrową liczbą jest 48 w systemie rzymskim?
26. Czy istnieje liczba dodatnia, której zapis ma tyle samo cyfr w każdym systemie pozycyjnym?
27. Czy ostrosłup trójkątny to to samo co czworościan?
28. Co otrzymamy, jeśli liczbę a przekształcimy tak, jak trzeba przekształcić a , żeby dostać b ?
29. Jaki wzór opisuje wyrazy ciągu $-2, 4, -8, 16, -32, \dots$?
30. Czy rozwiązaniem nierówności $|x| > 0$ jest zbiór $\{x: x > 0 \text{ i } x < 0\}$?
31. Czy zbiór liczb spełniających nierówności $x > 5$ i $x < 3$ jest niepusty?
32. Czy pierwiastkowanie liczb dodatnich jest rozdzielne względem dzielenia?
33. Ile waży cegła, która waży kilogram i ćwierć cegły?
34. Ile waży cegła, która waży kilogram i pół cegły, i ćwierć cegły?
35. Ile waży cegła, która waży kilogram i dwie cegły?
36. Ile waży cegła, która waży kilogram i $\frac{5}{7}$ cegły?
37. Ile razy 2 jest większe od $\frac{3}{5}$?
38. O ile 2 jest większe od $\frac{3}{5}$?
39. Zbiór ilu punktów jest opisany równaniem $x^2 + y^2 = 0$?
40. Zbiór ilu punktów jest opisany równaniem $x^2 + y^2 + 1 = 0$?
41. Zbiór ilu punktów jest opisany równaniem $x^2 + y^2 - 1 = 0$?
42. Czy okrąg jest zawsze dłuższy niż jego trzy średnice?
43. Czy okrąg może być krótszy niż jego siedem promieni?
44. Jak nazywamy liczbę nie większą od 0?
45. Jaką odciętą ma punkt na prostej $x + 1 = 0$?
46. Czy proste $x + y = 1$ i $x - y = 1$ przecinają się?
47. Ile cyfr arabskich ma oś symetrii?
48. Ile cyfr rzymskich ma oś symetrii?
49. Czy więcej liter w alfabecie łacińskim ma pionową, czy poziomą oś symetrii?
50. Co to za zbiór liczb: $\{x: x = x\}$?
51. Co to za zbiór liczb: $\{x: x \neq x\}$?
52. Jaka liczba ma liczbę odwrotną?
53. Jaka liczba ma liczbę przeciwną?



odwrotne

różnych znaków

różnej parzystości

sześciocyfrową

sześciocyfrową

tak

tak

b

$(-2)^n$

nie

nie

tak

$\frac{4}{3}$ kg

4 kg

niemożliwe

3,5 kg

$\frac{10}{3}$

$\frac{7}{5}$

1

0

nieskończenie wielu

tak

tak

niedodatnią

-1

tak

3

6

pionową

$\mathbb{R}$

$\emptyset$

różna od zera

każda

54. Jaki wzór opisuje wyrazy ciągu: 0,1; -0,01; 0,001; -0,0001; ... ?
55. Które działanie (wg kolejności wykonywania) nadaje nazwę wyrażeniu arytmetycznemu?
56. Który ze zbiorów jest nieskończony: $A = \mathbb{N}$ czy $B = \{x: |x| < 1\}$?
57. Czy pierwiastek z liczby może być większy niż ta liczba?
58. Co to za liczba, której n -ta potęga to a ?
59. Jaką długość ma przekątna sześciąnu jednostkowego?
60. Ile wynosi suma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$?
61. Czy dodawanie jest rozdzielne względem mnożenia?
62. Czy potęgowanie liczb dodatnich jest rozdzielne względem mnożenia?
63. Ile dzielników pierwszych ma liczba 60?
64. Ile dzielników ma liczba 60?
65. Czy zdanie „ $\sqrt{4} = -2$, bo $(-2)^2 = 4$ ” jest prawdziwe?
66. Jak zdefiniować (symbolami) $\sqrt[n]{p}$, gdy n jest nieparzyste, a p ujemne?
67. Jakie jest x , jeśli $a < 0$ i $ax < a$?
68. Co to za zbiór liczb: $\{x: x = x \text{ lub } x \neq x\}$?
69. Co to za zbiór liczb: $\{x: x = x \text{ i } x \neq x\}$?
70. Czy ścianami dwunastościanu mogą być pięciokąty?

Poziom licealny

71. Jaka to funkcja, której wartości maleją, gdy maleją argumenty?
72. Jak nazywamy stosunek odciętej do rzędnej punktu na drugim ramieniu kąta α , którego pierwszym ramieniem jest półoś $\overrightarrow{OX}$?
73. Czy to prawda, że liczba naturalna, która nie jest parzysta, jest nieparzysta?
74. Czy to prawda, że funkcja elementarna, która nie jest parzysta, jest nieparzysta?
75. Czy to prawda, że liczba rzeczywista, która nie jest wymierna, jest niewymierna?
76. Czy to prawda, że funkcja elementarna, która nie jest wymierna, jest niewymierna?
77. Jakie jest równanie prostej p , jeśli rzutem prostokątnym punktu $(0, 0)$ na tę prostą jest (a, b) ?
78. Dla jakiego kąta x spełniona jest równość $\sin x = \frac{\pi}{2}$?
79. Czy zdanie „Jeśli $1 + 0 = 10$, to $1 + 1 = 11$.” jest prawdziwe?
80. Jaki jest punkt zaczepienia w układzie kartezjańskim wektora o współrzędnych $[1, 1]$?
81. Czy zdanie „Jeśli p , to q .” oznacza, że p jest warunkiem koniecznym q ?
82. Czy zdania $\sin x = 2$ i $x + 1 = x$ są równoważne?
83. W jakim punkcie wykres funkcji $y = 2^x$ przecina oś OX ?
84. Ile podzbiorów ma zbiór $A = \{\emptyset\}$?

85. Czy istnieje zbiór, który ma tylko jeden podzbiór?
86. Czy ścianami dwunastościanu muszą być pięciokąty?
87. Czy połowa liczby jest jej funkcją?
88. Czy parzystość liczby naturalnej jest jej funkcją?
89. Jaką rozwartość ma kąt, którego jednym ramieniem jest oś $\overrightarrow{OX}$, a drugie ma kierunek wektora $[-1, 1]$?
90. Ile liczb spełnia nierówność $\sin x \geq 1$?
91. Wykresem jakiej funkcji jest krzywa o równaniu $x^2 + y^2 = 1$?
92. Ile radianów ma kąt środkowy oparty na łuku o długości średnicy okręgu?
93. Ile radianów ma kąt wpisany oparty na łuku o długości promienia okręgu?
94. Jaki jest wykładnik potęgi, do której trzeba podnieść 2, aby otrzymać 3?
95. Ile jest równań kwadratowych $x^2 + px + q = 0$, których rozwiązaniem jest $\{1, 2\}$?
96. Ile jest parabol o wierzchołku w punkcie $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ i miejscach zerowych 0 i 1?
97. Ile jest parabol o wierzchołku w punkcie $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ i miejscach zerowych 1 i 2?
98. Jaki znak ma sinus 3?
99. Czy odcinek na prostej należy do tej prostej?
100. Czy funkcja $\frac{1}{x}$ jest malejąca?

Antoni Dindorf

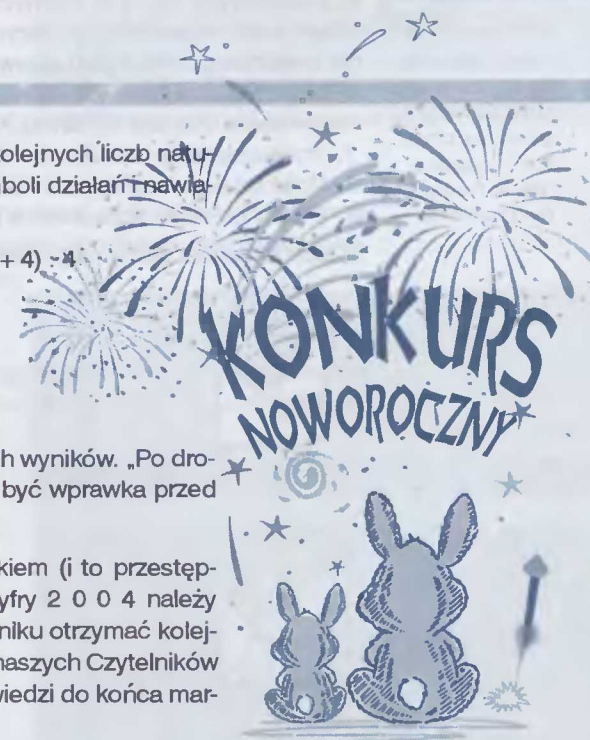
KONKURS NOWOROCZNY

Znane jest zadanie polegające na zapisywaniu kolejnych liczb naturalnych przy pomocy czterech czwórek oraz symboli działań i nawiasów. Można zacząć tak:

$$\begin{aligned} 0 &= 4 - 4 + 4 - 4 & 5 &= (4 \cdot 4 + 4) : 4 \\ 1 &= (4 + 4) : (4 + 4) & 6 &= \dots \\ 2 &= (4 \cdot 4) : (4 + 4) & 7 &= \dots \\ 3 &= (4 + 4 + 4) : 4 & & \dots \\ 4 &= 4! : (4 + 4 - \sqrt{4}) & & \dots \end{aligned}$$

a przy odrobinie sprytu dojść do bardzo wysokich wyników. „Po drodze” nie można opuścić żadnej liczby. To może być wprawka przed naszym konkursem.

W związku z rozpoczynającym się kolejnym rokiem (i to przestępnym!) ogłaszamy konkurs specjalny. Pomiędzy cyfry 2 0 0 4 należy wstawić znaki działań lub nawiasy, tak aby w wyniku otrzymać kolejne liczby naturalne 1, 2, 3, ..., n . Ciekawe, kto z naszych Czytelników osiągnie najwyższe n . Redakcja czeka na odpowiedzi do końca marca, a na zwycięzców czekają nagrody.



Mierzenie pól cyrklem i linijką

Linie doskonałe to takie, które ślizgają się same po sobie. Na płaszczyźnie własność tę mają tylko okrąg i prosta, w przestrzeni dochodzi jeszcze linia śrubowa.



Każdy punkt figury można przesunąć na dowolny inny, zachowując przy tym całą figurę.

Od czasów starożytnych konstrukcje geometryczne wykonuje się wyłącznie przy użyciu cyrkla i linijki bez podziałki. To ograniczenie narzędzi zawiązuje Platonowi, który uznał, że rozwiązanie problemu konstrukcyjnego powinno sprowadzać się do kreślenia figur doskonałych, a za takie uważał jedynie okrąg i prostą.

Jednym z często spotykanych problemów konstrukcyjnych jest zagadnienie kwadratury danej figury, to znaczy skonstruowania kwadratu o polu równym polu tej figury. W artykule zajmiemy się kwadraturą dowolnych wielokątów płaskich. Ta operacja umożliwi rozwiązanie kilku oryginalnych zadań, mianowicie konstrukcyjnego porównywania i mierzenia pól wielokątów, a nawet objętości brył.

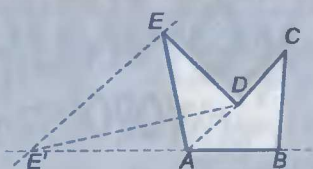
Z wielokąta – kwadrat

O innym typie równoważności figur – tzw. równoważności przez rozcina – napiszemy w następnym numerze.

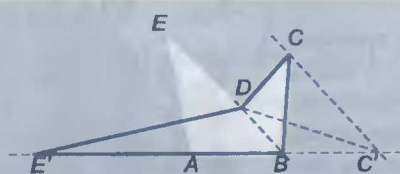
W matematyce figury o równych polach nazywa się **polowo równoważnymi**. W tym artykule będziemy je nazywali krócej – po prostu równoważnymi. Zagadnienie kwadratury danej figury sprowadza się więc do skonstruowania równoważnego jej kwadratu, a w zasadzie do skonstruowania boku tego kwadratu (wtedy dokończenie konstrukcji jest już łatwe). Kwadratury wielokąta dokonamy w trzech etapach:

- I. Przekształcenie wielokąta w równoważny trójkąt.
- II. Przekształcenie trójkąta w równoważny prostokąt.
- III. Przekształcenie prostokąta w równoważny kwadrat.

Proces ten zilustrujemy na przykładzie wklęsłego pięciokąta $ABCDE$.



Rys. 1



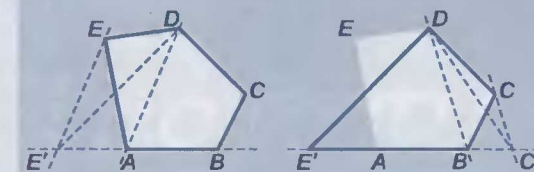
Rys. 2

Etap I

Wybermy dowolny bok wielokąta, np. AB jako podstawę przyszłego trójkąta. Przedłużamy bok AB w obie strony. Przez wierzchołek E prowadzimy prostą równoległą do przekątnej AD i w przecięciu z prostą zawierającą podstawę AB otrzymujemy punkt E' . Zauważmy, że trójkąty $AE'D$ i AED są równoważne, ponieważ mają wspólny bok AD i równe wysokości opuszczone z przeciwległego wierzchołka. Zatem pięciokąt $ABCDE$ i czworokąt $BCDE'$ są równoważne.

Czynności te powtarzamy dla przekątnej DB , zastępując trójkąt BCD równoważnym mu trójkątem $BC'D$.

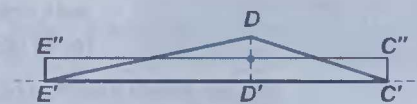
Otrzymany w wyniku tych operacji trójkąt $C'DE'$ jest równoważny wyjściowemu pięciokątowi $ABCDE$. Pierwszy etap kwadratury został zakończony. Analogiczną konstrukcję można wykonać w przypadku pięciokąta wypukłego (rys. 3), a także innych wielokątów (zmienia się tylko liczba powtórzeń opisanych tu operacji).



Rys. 3

Etap II

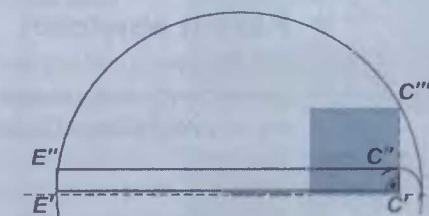
Konstrukcja prostokąta równoważnego trójkątowi jest bardzo prosta. Wystarczy za jeden z boków przyjąć połowę dowolnej wysokości trójkąta, a za drugi – bok, na który ta wysokość jest opuszczona. Rys. 4 ilustruje tę operację w przypadku trójkąta $E'C'D$. Podziału wysokości dokonujemy oczywiście konstrukcyjnie – cyrklem i linijką (konstrukcja symetralnej odcinka). Zatem prostokąt $E'C'C''E''$ jest równoważny trójkątowi $E'C'D$, a tym samym pięciokątowi $ABCDE$.



Rys. 4

Etap III

Przekształcenie prostokąta w równoważny mu kwadrat też nie jest trudne. Dla prostokąta o bokach długości a i b wystarczy konstrukcyjnie wyznaczyć odcinek o długości będącej średnią geometryczną tych liczb, tzn. $\sqrt{ab}$ (patrz np. poprzedni MMM, s. 11). Rys. 5 ilustruje taką konstrukcję w przypadku prostokąta $E'C'C''E''$. Odcinek $C'C'''$ stanowi bok szukanego kwadratu (równoważnego prostokątowi $E'C'C''E''$ i zarazem wyjściowemu pięciokątowi).



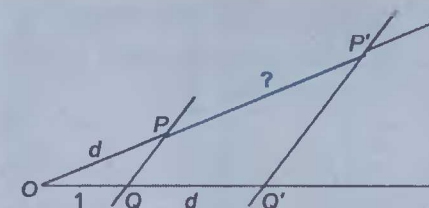
Rys. 5

Porównywanie pól wielokątów

Aby porównywać pola różnych wielokątów za pomocą cyrkla i linijki, wystarczy teraz dokonać kwadratury każdego wielokąta. Po skonstruowaniu boków obu kwadratów wystarczy cyrklem porównać ich długości.

Pomiar pola wielokąta

Pole dowolnego wielokąta można zmierzyć za pomocą cyrkla i linijki z dowolną dokładnością, jeśli tylko dany jest odcinek jednostkowy. Aby tego dokonać, zaczynamy od kwadratury wielokąta prowadząc do skonstruowania odcinka o długości równej długości boku kwadratu równoważnego wyjściowemu wielokątowi. Powiedzmy, że długość ta wynosi d (zatem pole kwadratu to d^2). Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy skonstruować odcinek o długości d^2 . Konstrukcję tę przedstawia rys. 6, gdzie poszukiwany odcinek to PP' . Opis konstrukcji pozostawiamy Czytelnikowi.



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Teraz możemy przystąpić do konstrukcyjnego pomiaru pola.

a) Na odcinku PP' odkładamy odcinek jednostkowy (tak długo, jak się da). Tę całkowitą liczbę odłożeń oznaczamy przez n . Jeśli coś jeszcze z odcinka PP' pozostanie (nazwijmy ten odcinek $P''P'$), to długość tego odcinka jest mniejsza niż 1.

b) Dzielimy odcinek jednostkowy (korzystając z twierdzenia Taleasa) na dziesięć równych części (rys. 8). Skonstruujemy w ten sposób odcinek o długości 0,1 jednostki. Ten odcinek odkładamy jak najwięcej (n_1) razy na odcinku $P''P'$. Wiemy, że $n_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Jeśli coś nadal z odcinka $P''P'$ pozostanie (ozn. $P'''P'$), to jest to mniej niż 0,1.

c) Czynności z punktu b) powtarzamy odkładając na odcinku $P'''P'$ odcinek o długości 0,01 jak najwięcej (n_2) razy itd. Procedurę kontynuujemy tak długo, aż uzyskamy wymaganą dokładność pomiaru pola.

Ostatecznie mierzone pole wielokąta będzie równe $n_1 n_2 \dots$, gdzie n_i to kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego. Widzimy więc, że za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki można geometrycznie wyznaczyć z dowolną dokładnością pole każdego wielokąta płaskiego.

Pomiar objętości

Przedstawioną metodę można też zastosować do porównywania i pomiaru objętości niektórych brył, np. graniastosłupów i ostrosłupów. Zagadnienie to pozostawiamy do przemyślenia Czytelnikom.

Piotr Olszowiec

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Zadania należy rozwiązać konstrukcyjnie, posługując się cyrklem i linijką bez podziałki. Zakładamy, że dany jest odcinek jednostkowy.

- Opisz kwadraturę figury złożonej z pięciu różnych kwadratów.
- Wyznaczyć jako długość odcinka różnicę pól dwóch kwadratów z poprzedniego zadania.
- Skonstruuj odcinek wyznaczający stosunek pól kwadratów z zad. 2.
- Pierwszą kwadraturą figury krzywoliniowej była kwadratura księżyców Hipokratesa* trójkąta prostokątnego przeprowadzona przez pitagorejczyków ok. IV w. p.n.e. Opisz tę konstrukcję.
- Mając dane odcinki o długościach a, b, c, d, e , skonstruuj odcinek o długości x , gdzie:

a) $x = a\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

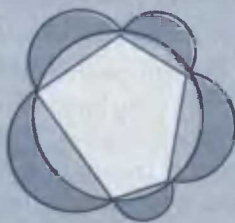
c) $x = \frac{abc}{de}$

b) $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}$

d) $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$

* Chodzi o Hipokratesa z Chios, znanego ucznia Pitagorasa. Nie mylić z Hipokratesem z Kos, patronem lekarzy.

Księżycy Hipokratesa wielokąta wpisanego w okrąg to figury, których brzegi są łukami tego okręgu i półokręgów o średnicach będących bokami wielokąta, leżących na zewnątrz tego wielokąta.



Wirujące trójkąty

W poprzednim numerze MMM prezentowaliśmy wybór zadań z pierwszego dnia finałów paryskich Międzynarodowych Mistrzostw w GMiL. Jedno z zadań pt. „Zagubiony w lesie” sprawiło wiele kłopotów i uczestnikom finału i naszym Czytelnikom, dlatego przedstawiamy jego rozwiązanie.

Zadanie 1

Mateusz zagłodził w lesie, który ma kształt trójkąta równobocznego. Nie zna wymiarów lasu, ale posługując się specjalnym instrumentem ustalił, że znajduje się o 6 km od jednego z wierzchołków, o 8 km od drugiego i o 10 km od trzeciego wierzchołka. Jaka jest powierzchnia lasu?

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia jak na rys.1, gdzie P_1, P_2, P_3 to pola odpowiednio trójkątów ABM, BCM, ACM . Trójkąt ACM obracamy wokół punktu A o kąt 60° w prawo otrzymując trójkąt $A'C'M'$. Oczywiście w tym przekształceniu punkt A pozostaje na swoim miejscu, a obrazem C jest B . Odcinek AM' jest obrazem AM , więc $\angle MAM' = 60^\circ$, a skoro $AM = AM'$, to trójkąt MAM' jest równoboczny, o boku $AM = 8$ km. Bok $M'C'$, jako obraz MC , ma 6 km (rys. 2).

Widzimy, że w trójkącie $MM'B$ znamy długości wszystkich boków. Wynoszą one 6, 8 i 10 km, zatem jest to trójkąt prostokątny o kącie prostym $MM'B$. Możemy zapisać równość pól:

$$P_1 + P_3 = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle ACM} = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle ABM'} = P_{\triangle AMM'} + P_{\triangle MM'B} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 24.$$

Wykonując w analogiczny sposób obroty o 60° trójkąta ABM wokół punktu B i trójkąta BCM wokół punktu C i powtarzając powyższe rozumowanie, otrzymujemy dwa podobne równania. Wszystkie trzy możemy wtedy zapisać w postaci układu równań przedstawionego obok.

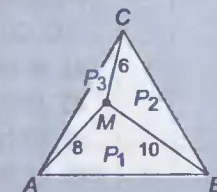
$$\begin{cases} P_1 + P_3 = \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} + 24 \\ P_1 + P_2 = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} + 24 \\ P_2 + P_3 = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} + 24. \end{cases}$$

Dodając te równania stronami otrzymujemy

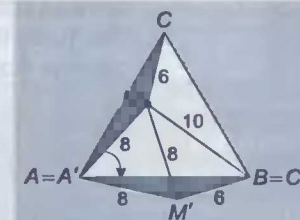
$$2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} (6^2 + 8^2 + 10^2) + 72,$$

czyli $2P_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 200 + 72$, zatem $P_{\triangle ABC} = 25\sqrt{3} + 36 \approx 79,3 \text{ km}^2$.

Michał Pilipczuk



Rys. 1



Rys. 2

Zadanie 2

W którym miejscu w trójkątym lesie (niekoniecznie równobocznym) powinien stanąć Mateusz, aby suma jego odległości od wierzchołków trójkąta była najmniejsza? Czy dla każdego trójkąta taki punkt istnieje? Jak skonstruować go za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki?

Wskazówka

Zadanie to można również rozwiązać metodą „wirujących trójkątów”.

Piszemy jedna za drugą...

Tak rozpoczyna się wiele zadań łamigłówekowych. Można je dokończyć na wiele przemyślnych sposobów (od całkiem prostych po dość skomplikowane). Potem można postawić różne pytania. Spróbujemy znaleźć odpowiedzi na niektóre z nich.

Zadanie 1

Piszemy jedna za drugą kolejne liczby naturalne, zaczynając od 1, a kończąc na 100. Oto kilka możliwych pytań:

- Ile cyfr ma tak napisana liczba?
- Jaka cyfra stoi na miejscu pięćdziesiątym szóstym? A setnym? A dwusetnym?
- Która z cyfr występuje najczęściej? A która najrzadziej?
- Ile razy napisaliśmy cyfrę 3? A 0?
- ...

Zastanówmy się najpierw, jak zbudowana jest nasza liczba. Pierwszych 9 pozycji zajmują liczby jednocyfrowe (od 1 do 9). Potem następuje 90 liczb dwucyfrowych (od 10 do 99), które zajmują $90 \cdot 2 = 180$ kolejnych miejsc. Ostatnie trzy miejsca zajmuje liczba 100.

ad **a)** Łatwo jest więc odpowiedzieć na pierwsze z postawionych pytań – napisana liczba ma $9 + 180 + 3 = 192$ cyfr.

ad **b)** Obliczenia te dostarczają nam jednak dużo więcej informacji, np. że na miejscu dwusetnym nic już nie stoi, a na miejscach 56 i 100 stoją cyfry pochodzące z liczb dwucyfrowych (i są to oczywiście ich pierwsze cyfry, gdyż pytamy o pozycje parzyste – tak jest począwszy od pozycji 10, a skończywszy na 188).

Pozostaje odpowiedź na pytanie, z której dziesiątki pochodzą liczby zajmujące interesujące nas pozycje. Zajmijmy się miejscem o numerze 56. Ponieważ pierwszych 9 miejsc zajmują liczby od 1 do 9, pozostaje do rozważenia kolejnych 47 miejsc. 40 z nich zajmuje dwadzieścia początkowych liczb dwucyfrowych (od 10 do 29), a na następnych dziesięciu parzystych pozycjach występuje 3 (cyfra dziesiątek kolejnych dziesięciu liczb).

Można to też wyliczyć: $56 = 9 + 23 \cdot 2 + 1$, czyli na 56 miejscu stoi cyfra dziesiątek dwudziestej czwartej liczby dwucyfrowej (którą jest 33). Jeśli chodzi o miejsce setne, to $100 = 9 + 2 \cdot 45 + 1$, czyli na setnym miejscu stoi cyfra dziesiątek czterdziestej szóstej liczby dwucyfrowej (którą jest 55), czyli 5.

ad **c)** W kolejnym pytaniu najłatwiej odpowiedzieć, jaka cyfra występuje w napisanej liczbie najrzadziej. Musi to być zero, gdyż występuje ono na pozycjach jednościany tylko samo raz, co wszystkie inne cyfry (bo wypisujemy 10 pełnych dziesiątek liczb naturalnych) i tylko raz na pozycji dziesiątek, podczas gdy każda z pozostałych cyfr występuje na pozycji dziesiątek więcej niż raz.

ad **c, d)** Zanim odpowiemy na pozostałe pytania, sporządzimy tabelkę występowania poszczególnych cyfr w kolejnych dziesiątkach liczb naturalnych.

Początkowe pola wypełniamy licząc trochę „na palcach”, ale szybko zauważamy pewne prawidłowości, które pozwalają dokończyć wypełnianie niemal automatycznie. Teraz łatwo możemy odpowiedzieć na pozostałe pytania. W naszej liczbie najczęściej występuje cyfra 1, a cyfrę 3 napisaliśmy dwadzieścia razy.

Podane zadanie możemy modyfikować, zwiększając długość napisanej liczby (np. piszemy kolejno liczby od 1 do 500), wypisując liczby nie od początku, a – powiedzmy – od 1024, opuszczając przy wypisywaniu niektóre liczby (np. piszemy tylko wielokrotności piątki) itp., ale metoda poszukiwania rozwiązania będzie podobna. Sytuacja komplikuje się, gdy początkowe zadanie zastąpimy takim:

liczby cyfra	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	razem
1	2	10	1	1	1	1	1	1	1	2	21
2	1	2	10	1	1	1	1	1	1	1	20
3	1	1	2	10	1	1	1	1	1	1	20
4	1	1	1	2	10	1	1	1	1	1	20
5	1	1	1	1	2	10	1	1	1	1	20
6	1	1	1	1	1	2	10	1	1	1	20
7	1	1	1	1	1	1	2	10	1	1	20
8	1	1	1	1	1	1	1	2	10	1	20
9	1	1	1	1	1	1	1	1	2	10	20
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	11
razem	11	20	20	20	20	20	20	20	20	21	192

Zadanie 2

Piszemy jedna za drugą kolejne liczby naturalne, przy czym każdą piszemy tyle razy, ile jest równa, zaczynając od 1, a kończąc na ostatnim wystąpieniu liczby 100. Pytania pozostają jak w poprzednim zadaniu.

ad **a)** Tym razem liczby jednocyfrowe zajmują $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ miejsc. Liczby dwucyfrowe $(10 + 11 + 12 + \dots + 99) \cdot 2$ miejsc, a to łatwo wyliczyć, bo to tyle samo, co

$$(10 + 99) + (11 + 98) + (12 + 97) + \dots + (97 + 12) + (98 + 11) + (99 + 10) = \\ = (10 + 99) \cdot 90 = 109 \cdot 90 = 9810.$$

Na koniec powtórzenia liczby 100 zajmują 300 miejsc. Napisana w ten sposób liczba ma więc $45 + 9810 + 300 = 10\,155$ cyfr.

ad **b)** Jaka cyfra stoi na 56. miejscu? Wiemy, że pierwsze 45 pozycji zajętych jest przez liczby jednocyfrowe, kolejne 20 pozycji zajmuje 10 wystąpień liczby 10, zatem na pięćdziesiątej szóstej pozycji musi stać cyfra dziesiątek pochodząca z szóstego wystąpienia dziesiątki. Można to również wyliczyć:

$$56 = (1 + 2 + \dots + 9) + 5 \cdot 2 + 1.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

- Jaka cyfra stoi na 500. miejscu liczby powstałej z napisania kolejno liczb od 1 do 1000? Ile cyfr ma ta liczba?
- Piszemy jedna za drugą kolejne liczby nieparzyste od 1 do 199. Jaka cyfra stoi na miejscu setnym?
- Piszemy jedna za drugą kolejne liczby naturalne, przy czym każdą piszemy tyle razy, ile jest ona równa, zaczynając od 1, a kończąc na ostatnim wystąpieniu liczby 100. Jaka cyfra występuje na miejscu 501?
- A jeśli napiszemy w ten sposób liczby parzyste od 1 do 200, jaka cyfra będzie stała na pozycji 100 000?

Podobnie można obliczyć, jakie cyfry zajmują pozycje 100 i 200:

$$100 = (1 + 2 + \dots + 9) + (10 + 11) \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 1,$$

$$200 = (1 + 2 + \dots + 9) + (10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1.$$

Widzimy, że setną pozycję zajmuje cyfra dziesiątek siódmego wystąpienia liczby 12 (czyli 1), a dwusetną – cyfra dziesiątek trzeciego wystąpienia liczby 16 (czyli też 1).

liczby cyfra	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	razem
1			21	31	41	51	61	71	81		
2	2			32	42	52	62	72	82	92	
3	3	13			43	53	63	73	83	93	
4	4	14	24			54	64	74	84	94	
5	5	15	25	35			65	75	85	95	
6	6	16	26	36	46			76	86	96	
7	7	17	27	37	47	57			87	97	
8	8	18	28	38	48	58	68			98	
9	9	19	29	39	49	59	69	79			
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90		

liczby cyfra	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100	razem
1	11	146	21	31	41	51	61	71	81	191	705
2	2	32	247	32	42	52	62	72	82	92	715
3	3	13	53	348	43	53	63	73	83	93	825
4	4	14	24	74	449	54	64	74	84	94	935
5	5	15	25	35	95	550	65	75	85	95	1045
6	6	16	26	36	46	116	651	76	86	96	1155
7	7	17	27	37	47	57	137	752	87	97	1265
8	8	18	28	38	48	58	68	158	853	98	1375
9	9	19	29	39	49	59	69	79	179	954	1485
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	200	650
razem	65	310	510	710	910	1110	1310	1510	1710	2010	10155

ad **c)** Możemy teraz obstawiać, która z cyfr wystąpi w naszej liczbie najczęściej, a która najrzadziej. Najrzadsze znowu powinno być zero, a najczęstsza – pewnie dziewiątka, jako cyfra o największej wartości liczbowej – liczby zawierające dziewiątki będą powtarzane więcej razy od analogicznych liczb, w których zamiast dziewiątki stoi inna cyfra.

ad **c, d)** Dla pewności skonstruujmy tabelę występowania poszczególnych cyfr w kolejnych dziesiątkach wypisywanych przez nas liczb. Właściwie większość pól możemy wypełnić bez żadnych rachunków.

Jak wypełnić pozostałe pola? Zrobmy to na przykładzie kolumny liczb z przedziału [61, 70]. Cyfra 7 jest używana tylko w liczbach 67 i 70, zatem wystąpi ona 67 + 70 razy. A ile razy użyjemy cyfry 6?

- 61 razy użyjemy jej, pisząc wszystkie wystąpienia liczby 61,
- 62 razy użyjemy jej, pisząc wszystkie wystąpienia liczby 62,
- ...
- 69 razy użyjemy jej, pisząc wszystkie wystąpienia liczby 69, z jednym wyjątkiem: przy pisaniu liczb 66 użyjemy szóstki 66 · 2 razy.

Zatem w sumie użyjemy:

$$61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 \cdot 2 + 67 + 68 + 69 = 651$$

szóstek.

Dla cyfry n (w dziesiątce, gdzie n jest cyfrą dziesiątek) jest to zawsze

$$(10n+1) + (10n+2) + \dots + (10n+9) + 11n = 101n + 45.$$

Dla cyfry $(n+1)$ w tej samej dziesiątce:

$$10n + (n+1) + 10(n+1) = 21n - 11.$$

Jedynie odstępstwa to „1” w ostatniej i „0” w pierwszej dziesiątce.

Postępując według tych zasad możemy dokończyć wypełnianie tabeli. Tym razem w naszej liczbie najczęściej występuje cyfra 9 (1485 razy), a najrzadziej oczywiście znowu cyfra 0 (tylko 650 razy). Cyfra 3 wystąpi 825 razy.

Mam nadzieję, że Czytelnicy MMM sami ułożą dalsze ciekawe zadania na ten temat.

Dorota Kolany

Opisane zagadnienia mogą zainteresować nie tylko miłośników łamigłówek, ale i programistów. Polecamy im komputerową weryfikację otrzymanych wyników. Na przykład znalezienie odpowiedzi na pytanie, ile razy występuje w ciągu jakaś cyfra, można stosunkowo prosto zrealizować pisząc program drukujący do pliku bez odstępów kolejno wypisywane w zadaniu liczby, a następnie znajdujący w tak otrzymanym pliku dane znaki. (red.)

Wyłowione z sieci (3)

Ciekawe pierwszaki

<http://primes.utm.edu/curios/>

Jest to zbiór niezwykłości związanych z liczbami pierwszymi. Niektóre są proste i powszechnie znane, inne mogą zadziwić nawet największych znawców łamigłówek. Można tam znaleźć pierwszą nielegalną liczbę pierwszą. Jest to liczba, której zapis szesnastkowy jest identyczny z plikiem zawierającym spakowany kod źródłowy DeCSS (programu do nielegalnej dekompresji płyt DVD).

ed. s. 3³

Równania funkcyjne

W szkole często zadania tekstowe rozwiązuje się z wykorzystaniem równań lub układów równań z kilkoma niewiadomymi. Rozwiązaniami są w takich przypadkach zbiory liczb (jeśli równanie było z jedną niewiadomą) albo zbiory par czy trójek liczbowych, jeśli równanie czy układ równań były z dwiema lub trzema niewiadomymi. O każdej liczbie (parze, trójce) z takiego zbioru mówimy, że spełnia równanie, bo podstawiona do równania w miejsce niewiadomej zamienia równanie w równość prawdziwą. My zajmiemy się zupełnie innym typem równań – **równaniami funkcyjnymi**. Są one dość popularne na różnych konkursach matematycznych (np. zadanie 14 z tegorocznych eliminacji do II Mistrzostw Polski w GMiL zamieszczone w poprzednim numerze MMM).

Równania funkcyjne tym różnią się od „zwykłych” równań, że niewiadome nie oznaczają w nich liczb, lecz funkcje. Rozwiązaniami takich równań są nie zbiory liczb (ani ich par czy trójek), tylko zbiory funkcji. O każdej funkcji z takiego zbioru mówimy, że spełnia równanie, to znaczy, że podstawiona do równania w miejsce niewiadomej daje tożsamość, czyli równość prawdziwą dla wszystkich możliwych wartości argumentów.

Na wstępie trzeba zaznaczyć, że nie istnieje jakaś ogólna metoda pozwalająca rozwiązywać wszystkie równania funkcyjne. Ze „zwykłymi” równaniami jest podobnie. Nie ma przecież ogólnej metody rozwiązania wszystkich możliwych równań. Co więcej, wiadomo, że dla większości równań nie istnieje metoda pozwalająca opisać wzorem jego pierwiastki. Możemy je wyliczyć tylko w sposób przybliżony. Istnieją jednak duże grupy „zwykłych” równań, dla których można opisać algorytmy otrzymywania rozwiązania (np. równania liniowe, kwadratowe, sześciennne). Wśród równań funkcyjnych także istnieją pewne klasy, dla których znane są metody znajdowania rozwiązań, istnieją też równania, dla których takich metod nie ma (nie tylko dlatego, że matematycy ich jeszcze nie odkryli, ale dlatego, że one po prostu nie istnieją, co wykazano metodami logiki matematycznej). Wówczas jedynym wyjściem jest znajdowanie rozwiązania w pewnym przybliżeniu.

Nie będziemy tu prezentować żadnych metod ogólnych, choć opisywanie zagadnienia, w którym nawet po zrobieniu stu przykładów kompletnie nie wiadomo, jak zabrać się za sto pierwszy, może komuś wydać się mało sensowne. Są to jednak bardzo ciekawe zadania i na pewno warto zapoznać z nimi Czytelników MMM.

Zadanie 1

Dla jakich funkcji f i g równość $2f(x) - 3g(y) = 2x^2 + xy + 3y^2 - 1$ zachodzi dla dowolnych x i y ?

Rozwiązanie

Zacznijmy od znalezienia kilku szczególnych wartości, jakie przyjmuje wyrażenie $2f(x) - 3g(y)$ dla: a) $x = 1$ i $y = 1$, b) $x = 1$ i $y = 2$, c) $x = 2$ i $y = 1$, d) $x = 2$ i $y = 2$.

- a) $2f(1) - 3g(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 5$,
 b) $2f(1) - 3g(2) = 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 - 1 = 15$,
 c) $2f(2) - 3g(1) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 12$,
 d) $2f(2) - 3g(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 - 1 = 23$.

W ten sposób otrzymujemy układ czterech („zwykłych”) równań z czterema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 2f(1) - 3g(1) = 5 \\ 2f(1) - 3g(2) = 15 \\ 2f(2) - 3g(1) = 12 \\ 2f(2) - 3g(2) = 23 \end{cases}$$

w których rolę niewiadomych pełnią liczby: $f(1)$, $f(2)$, $g(1)$ i $g(2)$. Spróbujmy rozwiązać ten układ.

Z I i II równania wyznaczamy $2f(1)$ i przyrównujemy otrzymane wyrażenia:

$$\begin{aligned} 2f(1) &= 5 + 3g(1) \\ 2f(1) &= 15 + 3g(2) \end{aligned} \Rightarrow 5 + 3g(1) = 15 + 3g(2), \text{ czyli } 3g(1) - 3g(2) = 10.$$

Podobnie z IV i III równania wyliczamy $f(2)$ i przyrównujemy:

$$\begin{aligned} 2f(2) &= 12 + 3g(1) \\ 2f(2) &= 23 + 3g(2) \end{aligned} \Rightarrow 12 + 3g(1) = 23 + 3g(2), \text{ czyli } 3g(1) - 3g(2) = 11.$$

Spójrzmy teraz na wyróżnione zależności. Zgodnie z definicją funkcja to przyporządkowanie elementom jednego zbioru elementów drugiego zbioru w taki sposób, że każdemu elementowi z pierwszego zbioru odpowiada **dokładnie jeden** element drugiego zbioru. Zatem liczby $g(1)$ i $g(2)$ są wyznaczone jednoznacznie. Jedyna musi więc też być wartość wyrażenia $3g(1) - 3g(2)$, a nie jest, bo wykazaliśmy, że wyrażenie to przyjmuje zarówno wartość 10, jak i 11. Otrzymana sprzeczność mogłaby być rezultatem jakiegoś błędu popełnionego w rozumowaniu lub w rachunkach, ale takiego błędu (co Czytelnik może zechce raz jeszcze sprawdzić) nie było. Do sprzeczności doprowadziło nas więc błędne założenie, że istnieją takie funkcje f i g , że dla dowolnych x oraz y zachodzi równość $2f(x) - 3g(y) = 2x^2 + xy + 3y^2 - 1$, przy takim bowiem założeniu prowadziliśmy nasze rozumowanie. Możemy zatem odpowiedzieć, że **nie istnieją** funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych, które spełniają równanie podane w zadaniu.

Zadanie 2

Znajdź wszystkie funkcje f spełniające równanie $2f(x)f(y) - 4f(xy) = 12x + 12y + 6xy$.

Rozwiązanie

Aby funkcja f spełniała równanie, podana równość musi zachodzić dla dowolnych x oraz y . Przekonajmy się, czy taka funkcja w ogóle istnieje. W tym celu w miejsce x i y wstawiamy liczbę 0, otrzymując: $2f(0)^2 - 4f(0) = 0$. Wylączając $f(0)$ przed nawias mamy: $f(0)(2f(0) - 4) = 0$, skąd $f(0) = 0$ lub $2f(0) - 4 = 0$. Zatem $f(0)$ może być równe 0 lub 2.

Sprawdźmy teraz, co wyjdzie, jeśli do równania wstawimy 0 w miejsce x , a w miejsce y jakąś liczbę różną od 0, np. 6. Otrzymamy wtedy: $2f(0)f(6) - 4f(0 \cdot 6) = 12 \cdot 0 + 12 \cdot 6 + 6 \cdot 0 \cdot 6$, czyli $2f(0)f(6) - 4f(0) = 72$. Znowu wylączamy $f(0)$ poza nawias i mamy: $f(0)(2f(6) - 4) = 72$. Skoro iloczyn jest różny od zera, to żaden z czynników nie może być zerem, zatem $f(0) \neq 0$. Wcześniej dowiedliśmy, że są tylko dwie możliwości: $f(0) = 0$ lub $f(0) = 2$, ale teraz pozostała z nich tylko jedna: $f(0) = 2$.

Teraz postąpimy odwrotnie – sprawdźmy, co otrzymamy, jeśli do równania wstawimy 0 w miejsce y , a x niech będzie dowolne. Mamy wówczas: $2f(x)f(0) - 4f(x \cdot 0) = 12x + 12 \cdot 0 + 6x \cdot 0$, a po wyliczeniu $2f(x)f(0) - 4f(0) = 12x$. Uwzględniając, że $f(0) = 2$ mamy $4f(x) - 8 = 12x$, skąd $f(x) = 3x + 2$.

Pokazaliśmy zatem, że jedyną funkcją, która może spełniać warunki zadania, jest $f(x) = 3x + 2$. Wynikało to jednak z założenia, że taka funkcja w ogóle istnieje. Jeśli jest ono błędne, to i wniosek z niego może być fałszywy. Należy więc jeszcze sprawdzić, czy funkcja $f(x) = 3x + 2$ rzeczywiście spełnia wyjściowe równanie. Po podstawieniu do lewej strony równania mamy: $2f(x)f(y) - 4f(xy) = 2(3x + 2)(3y + 2) - 4(3xy + 2)$, a po otwarciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy $12x + 12y + 6xy$, czyli prawą stronę równania. Zatem istnieje tylko jedna funkcja spełniająca podane równanie i jest nią $f(x) = 3x + 2$.

Eugeniusz Sikorski

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Znajdź wszystkie funkcje $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich x z dziedziny warunek:
 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$.
2. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich x warunek
 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)\sqrt{2}$.
 Uzasadnij, że f jest okresowa.
3. Znajdź wszystkie funkcje nieparzyste f spełniające warunek
 $f(x-3) = f(3-x)$
 dla każdego x rzeczywistego.

Pierwszy gigant

Liczby pierwsze (czyli takie, które posiadają dokładnie dwa dzielniki naturalne) interesowały matematyków od zarania dziejów. Już Euklides w IV w. p.n.e. dowiódł, że jest ich nieskończenie wiele, a Eratostenes z Cyreny w III w. p.n.e. podał sposób ich znajdowania. Na początku XX w. znane były wszystkie liczby pierwsze poniżej miliona, pod koniec ubiegłego roku wszystkie poniżej 2 000 000 009. Jest ich 98 milionów, chociaż w ogóle znanych jest dużo więcej liczb pierwszych (tylko niekolejnych). Nadal jednak nie znamy efektywnego wzoru na wyznaczenie dowolnie wielu takich liczb.

Sito Eratostenesa to nazwa metody kolejnego „wysiewania” liczb pierwszych spośród liczb naturalnych większych od 1. Wybieramy najmniejszą liczbę (2) i kolorujemy ją, a potem wykreślamy wszystkie jej wielokrotności (czyli skreślamy automatycznie co drugą liczbę). Z pozostałych liczb (niepokolorowanych i nieskreślonych) wybieramy pierwszą wolną liczbę (3), kolorujemy, a potem wykreślamy wszystkie jej wielokrotności (niektóre liczby będą w tym procesie skreślane wiele razy). Powtarzamy to postępowanie, aż wszystkie liczby będą skreślone lub pokolorowane. Te ostatnie to właśnie liczby pierwsze.

Dowód Euklidesa, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, jest przykładem tzw. rozumowania „nie wprost”. Zakłada się, że tych liczb jest skończenie wiele, i bada, jakie byłyby tego konsekwencje. Oczywiście natychmiast otrzymuje się sprzeczność, bo jeśli $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ byłby zbiorem wszystkich liczb pierwszych, to liczba $P = p_1 p_2 p_3 p_n + 1$ do tego zbioru nienależąca (bo jest przecież większa od wszystkich jego elementów) również byłaby pierwszą, gdyż nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą (w każdym takim dzieleniu daje resztę 1).

Postulat Bertranda mówi, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ między liczbami n i $2n$ znajduje się liczba pierwsza. Fakt ten udowodnił w XIX w. matematyk rosyjski Pafnucy Czebyszew. Z niego również wynika nieskończoność zbioru liczb pierwszych.

Twierdzenie Dirichleta udowodnione również w XIX w. przez matematyka niemieckiego Piotra Dirichleta mówi, że w każdym ciągu postaci $a, a+b, a+2b, a+3b, \dots$, gdzie a i b są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Każda liczba złożona musi mieć dzielnik nieprzekraczający pierwiastka kwadratowego z tej liczby. W oparciu o tę własność można zbadać, czy dana liczba n jest pierwsza – wystarczy sprawdzić, czy nie dzieli się przez żadną z liczb pierwszych mniejszych lub równych $\sqrt{n}$. Jednak jeśli n jest dużą liczbą, to sprawdzenie tego faktu jest bardzo trudne. Tylko dzięki niezwyklej zręczności rachunkowej Leonard Euler udowodnił ok. r. 1772, że liczba $2^{31} - 1 = 2147483647$ jest pierwsza, a F. E. Lucas w 1876 r., że $2^{127} - 1$ też. Ta ostatnia liczba ma 39 cyfr i przez wiele lat była największą znaną liczbą pierwszą.

Dziś do badania pierwszości liczb używa się oczywiście komputerów. Szybki rozwój techniki sprawia, że liczba znanych liczb pierwszych szybko rośnie. Poszukiwania te odbywają się jednak na innej zasadzie niż sito Eratostenesa czy badanie podzielności przez mniejsze liczby pierwsze. Obecnie największych liczb pierwszych poszukuje się wśród tzw. **liczb Mersenne’a**, czyli liczb $M_p = 2^p - 1$, gdzie p jest pierwsze. Nie wiadomo, czy jest wśród nich nieskończenie wiele liczb pierwszych ani czy jest wśród nich nieskończenie wiele liczb złożonych. Duże liczby pierwsze mają współcześnie wielkie znaczenie w kryptografii, czyli teorii kodowania informacji.

W grudniu 2003 r. potwierdzono, że liczba

$$2^{20996011} - 1$$

jest pierwsza. Jest ona w tej chwili największą znaną liczbą pierwszą. Jej zapis dziesiętny ma 6320430 cyfr. Autorem tego odkrycia jest zespół ponad 10000 osób. Podana liczba jest czterdziestą znaną liczbą pierwszą Mersenne’a, ale nie wiadomo, czy znane są już wszystkie liczby Mersenne’a od niej mniejsze.

Odkrycie nowej liczby pierwszej Mersenne’a daje jednocześnie nową liczbę doskonałą, jeśli bowiem $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, to $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ jest liczbą doskonałą. Dowód tego faktu podał jeszcze w starożytności wspomniany na wstępie Euklides. Można też (choć nieco trudniej) pokazać, że każda parzysta liczba doskonała jest tej postaci, natomiast nie wiadomo, czy istnieją liczby doskonałe nieparzyste, i jest to być może najstarszy nierozwiązany problem matematyczny.

opr. MM, MŚ

LITERATURA

W. Bednarek, *Arytmetyka dla dociekliwych*, Wyd. NOWIK, Opole 1997.

P. Ribenboim, *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, WNT, Warszawa 1997.

W. Sierpiński, *Co wiemy, a czego nie wiemy o liczbach pierwszych*, PZWS, Warszawa 1961.

W. Sierpiński, *Czym się zajmuje teoria liczb*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1957.

M. Szurek, *Opowieści matematyczne*, WSiP, Warszawa 1987.

Wylowione z sieci (4)

Matematyka dla gimnazjalistów

<http://www.jolam.republika.pl/>

Stroną stworzoną przez nauczycielkę matematyki z Gimnazjum nr 3 w Zawierciu Zawieła m.in. informacje o brytach obrotowych i interaktywne prezentacje ich modeli oraz ćwiczenia z funkcji liniowych i kwadratowych. Daje możliwość rysowania wykresów dowolnych wielomianów bezpośrednio w oknie przeglądarki. Do każdego działu dołączony jest zestaw testów pozwalających na bieżąco sprawdzić swoją wiedzę. Na stronie wypatrzyliśmy rozmaite wpadki merytoryczne, ale choć sprawia ona wrażenie niedopracowanej, polecamy jej obejrzenie, ze względu na ciekawą koncepcję, pomysły i realizację.

wylowił Wojciech Głodek

Zadania dla Czytelników



1. Ile trwałoby zapisanie naszego pierwszego giganta, $2^{20996011} - 1$ na papierze? Ile papieru na to potrzeba?
2. Udowodnij, że liczby postaci $2^n - 1$, gdzie n jest liczbą złożoną, są złożone.
3. Udowodnij, że jeśli $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, to $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ jest liczbą doskonałą.
4. Udowodnij, że każda parzysta liczba doskonała jest tej postaci.
5. Udowodnij, że z zadania 4 wynika, że każda parzysta liczba doskonała może kończyć się w zapisie dziesiętnym tylko dwiema cyframi. Jakimi?
6. Można też (trochę trudniej) udowodnić, że wszystkie parzyste liczby doskonałe większe od 6 kończą się jedną z sześciu dwucyfrowych końcówek. Znajdź je. Czy wszystkie są faktycznie przyjmowane?
7. Ciekawie jest też przyjrzeć się zapisom dwójkowym parzystych liczb doskonałych. Korzystając z zadania 4, opisz, jak wyglądają te rozwinięcia.

Rozkosze Łamania Głowy

5 stycznia tego roku mija 30 lat od śmierci Lecha Pijanowskiego. Chyba właśnie on najbardziej przyczynił się do popularności zadań i zagadek logicznych w naszym kraju. Choć z zawodu był krytykiem filmowym, miał wielką pasję: gry i łamigłówki. W tym zakresie był niewątpliwie najwybitniejszym specjalistą w Polsce. Kilkakrotnie wznawiano jego znakomitą książkę „Przewodnik gier” stanowiącą prawdziwą encyklopedię wiedzy na temat gier bardziej i mniej znanych.

W latach 1970–1981 każde czwartkowe wydanie dziennika „Życie Warszawy” zawierało czterostronicowy dodatek „Życie i Nowoczesność”. Pijanowskiemu udało się przekonać redakcję do umieszczenia tam kącika poświęconego zadaniom logicznym. W numerze 87 z dnia 13 stycznia 1972, w którym ukazał się pierwszy odcinek, Pijanowski napisał: *Nowoczesność wymaga logiki, konsekwencji, zdolności kombinacji i kojarzenia we wszystkich sprawach, i poważnych, i błahych. Wymaga tego także życie.* W nowym dziale ukazywały się co tydzień niewielkie, ale (oby!) interesujące i podchwytliwe pytania z zakresu logiki, kombinacji i kojarzenia. Kącik nosił nazwę *Rozkosze Łamania Głowy* i opatrzony był charakterystyczną winietą (którą niektórzy nasi Czytelnicy z pewnością rozpoznają).

Początkowo wśród autorów poprawnych rozwiązań z danego numeru rozlosowywano nagrody książkowe, jednak zainteresowanie kącikiem przeszło wszelkie oczekiwania i już po kilku tygodniach stwierdzono, że może być wiele osób, które stale przysyłają rozwiązania i nigdy nic nie wylosują. Zmieniono zatem system: zadania były punktowane (zazwyczaj po 2 lub 3 pkt.), a po zgromadzeniu przez uczestnika 13 punktów miał on otrzymywać nagrodę rzeczową i zaczynać zbieranie punktów od nowa. Bardzo szybko okazało się, że takie reguły doprowadziłyby do szybkiego bankructwa redakcji. Po trzech seriach zadań w spisie osób nadsyłających rozwiązania pojawiło się 1076 nazwisk! W maju 1972 r. zasady uległy kolejnej zmianie. Powołana została *Liga Łamania Głowy*. Po zdobyciu 13 punktów jej uczestnik otrzymywał tytuł *Specjalisty* (potwierdzony publikacją nazwiska na łamach „Życia i Nowoczesności”), za trzykrotne zdobycie tytułu *Specjalisty* otrzymywało się tytuł *Eksperta* i dyplom, a za siedmiokrotne zdobycie tytułu *Eksperta* – tytuł *Mistrza* i dyplom. Po roku zapadła decyzja, że najwyższym osiągnięciem w lidze będzie tytuł *Arcymistrza Łamania Głowy*, przyznawany za trzykrotne zdobycie tytułu *Mistrza*. Tytułowi temu towarzyszyła legitymacja arcymistrza i specjalna odznaka według projektu Szymona Kobylińskiego. Pierwszym *Arcymistrzem Łamania Głowy* (w roku 1974) został **Mariusz Jakubowski*** ze Skolimowa pod Warszawą.

* Redakcja MMM bardzo prosi p. Mariusza o kontakt.



Liczba uczestników *Ligi* była olbrzymia. Rozwiązania przysyłali ludzie z całej Polski i z zagranicy (m.in. z ZSRR, Czechosłowacji, Niemiec, a nawet z Iranu, Iraku i Kanady). Pijanowski twierdził (i słusznie!), że dowodzi to, iż błędny jest powszechnie panujący pogląd, że tzw. „szary człowiek” nie lubi matematyki i logiki, nie umie konsekwentnie myśleć. Niewątpliwie jednak kącik zawdzięczał swoją popularność umiejętnościom swojego twórcy. Bo też zadania w *Lidze* były wyjątkowe. Nad wyraz pomysłowe, często niestandardowe, ubrane w ciekawą i zręcznie napisaną formę beletrystyczną... Obok zamieszczamy kilka przykładów. Wiele zadań Pijanowski wymyślał sam, ale wykorzystywał też dorobek innych. To właśnie Pijanowski powołał do życia popularnych do dziś Abackich, Babackich, Cabackich; niektóre wydarzenia miały miejsce na wymyślonej przez niego Wyspie Zagadkowej, gdzie np. było źródło niezwykle smaczkowej i odżywczej wody mineralnej „Bul-Bul”, a za określoną liczbę seso można było kupić tak rzadkie owoce, jak tocosie i apsi-ki; zagadki związane z ludźmi, którzy zawsze kłamią albo zawsze mówią prawdę, rozgrywały się w plemionach Bimbołów, Bambołów i Bumbołów; interesujące teorie snuł profesor Żabacki. Pojawiały się liczne zagadki liczbowe, krzyżówki, czasem zadania geometryczne. W 1972 r. ukazała się (wydana przez „Iskry”) książka Pijanowskiego *Rozkosze Łamania Głowy*, zawierająca sto kilkadziesiąt znakomitych zagadek w tym stylu.

Lech Pijanowski zmarł 5 stycznia 1974, w wieku 45 lat. Po jego śmierci Abacki i spółka nie znikli z „Życia i Nowoczesności”, kącik był dalej redagowany przez syna – Wojciecha (znanego później z prowadzenia różnych quizów telewizyjnych), jednak liczba specjalistów i ekspertów istotnie zmalała. „Życie i Nowoczesność” ukazywało się do stanu wojennego, czyli do grudnia 1981 r. Do tego czasu tytuł *Arcymistrza RŁG* zdobyło 98 osób. Później kącik *Rozkosze Łamania Głowy* ukazywał się co tydzień w „Życiu Warszawy”, aż do 1998 roku, dochowując się grubo ponad 1000 edycji i 161 *Arcymistrzów*. Dziś już nie istnieje.

Od wielu lat Abacki, Babacki i inni służą pomocą autorom łamigłówek publikowanych w rozmaitych pismach. Dziś znani są oni większości polskich miłośników zagadek logicznych, nawet tym najmłodszym, którzy nigdy o Lechu Pijanowskim nie słyszeli. Postacie utworzone przez Pijanowskiego dalej pomagają „łamać głowę”, z czego ich twórca zapewne bardzo by się cieszył.

Zadania dla Czytelników

A to dopiero

Oto pewna wiadomość z krainy zadań logicznych. Jeśli bumbramsztykle nie bimbambolą, wtedy oczywiście wichastry nie tentegują. Natomiast jeśli dingusy tentegują albo transmogryfikują, wówczas z całą pewnością bimbambolą wszystkie bumbramsztykle. Jeśli głątwy tentegują, wtedy – to jasne – żaden z dingusów nie bimbamboli. Jeśli natomiast wichastry nie obcyndalają się, wówczas każdy dingus transmogryfikuje. Jeśli wreszcie żadna głątwa nie bimbamboli, wówczas z pewnością bimbamboli każdy dingus. Wszystkie bumbramsztykle, głątwy, wichastry i dingusy coś robią – albo bimbambolą, albo tentegują, albo transmogryfikują, albo wreszcie – obcyndalają się. I każde z nich wykonuje tylko jedną z tych czynności. **Jak właściwie wygląda sytuacja?**

z książki *Rozkosze Łamania Głowy*

Kajak

KAJAK rozkłada się na następujące czynniki pierwsze: U, AH i AEEK.

A, E, J, H, K i U to sześć różnych cyfr. **Jakie to cyfry?**
„Ż i N”, nr 191

Odwiedziny

– Chciałem cię uprzedzić – powiedziałem żonie – że dziś wieczorem grożą nam odwiedziny Abackich. Zapowiedziano mi, że ktoś wpadnie.

– Ale kto? Wszyscy? Obydwójce z trzema synami? – zapytała, nieco przerażona.

– Zaraz ci wyjaśnię. Jeśli przyjdzie stary Abacki, to na pewno przyjdzie z żoną. Przyjdzie co najmniej jeden z dwu synów: Jacek albo Placek. Jeśli przyjdzie pani Abacka, wówczas nie przyjdzie jej syn Gacek lub odwrotnie. Gacek i Placek przyjdą albo obydwaj razem, albo też nie przyjdą wcale. Jeśli zaś przyjdzie Jacek, na pewno przyprowadzi ze sobą Placka i starego Abackiego.

– Dziękuję – powiedziała żona.

Kto przyszedł do nas wieczorem w odwiedziny?

„Ż i N”, nr 187

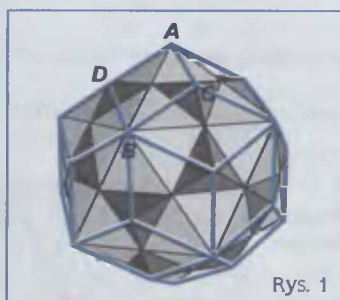


Na rozwiązania zadań czekamy do końca marca.

Krzysztof Ciesielski

Opakowania i inne rombościany

W poprzednich numerach przedstawione zostały wypuklenia stelli octanguli (MMM 2/2003) i kompozycji sześciannu z ośmiościanem (MMM 3/2003). W obu wypadkach otrzymywaliśmy rombościany (tzn. wielościany, których ściany są rombami) o przystających ścianach. Tym razem zajmiemy się opakowaniem na kompozycję dwunastościanu i dwudziestościanu. Na podstawie poprzednich konstrukcji można podejrzewać, że i tym razem otrzymamy rombościany.



Rys. 1

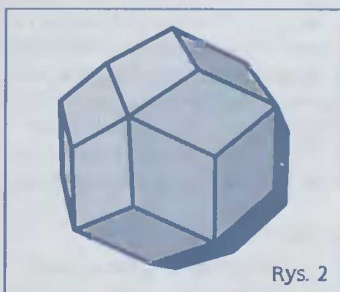
Rysunek 1 przedstawia kompozycję przenikających się brył: dwunastościanu i dwudziestościanu (dokładny opis znajduje się w MMM nr 3/2003). Krawędzie AB i CD leżą w jednej płaszczyźnie, połowią się i są prostopadłe. Zatem czworokąt $ACBD$ jest rombem. Tym razem rombów tworzących opakowanie jest 30 (gdyż po tyle krawędzi mają dwunastościan i dwudziestościan), a szukany wielościan – odkryty przez Johanna Keplera – nosi nazwę trzydziestościanu rombowego (rys. 2).

Bryła ta ma dwa rodzaje wierzchołków: w jednych spotyka się 5 rombów kątami ostrymi, a w drugich – 3 romby kątami rozwartymi. Romby będące ścianami tego wielościanu nazywa się czasem „złotymi rombami”, ponieważ stosunek ich przekątnych jest równy liczbie złotej $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Wykazanie, że tak jest w istocie, pozostawiam Czytelnikom.

Siatkę trzydziestościanu rombowego przedstawia rysunek 3.

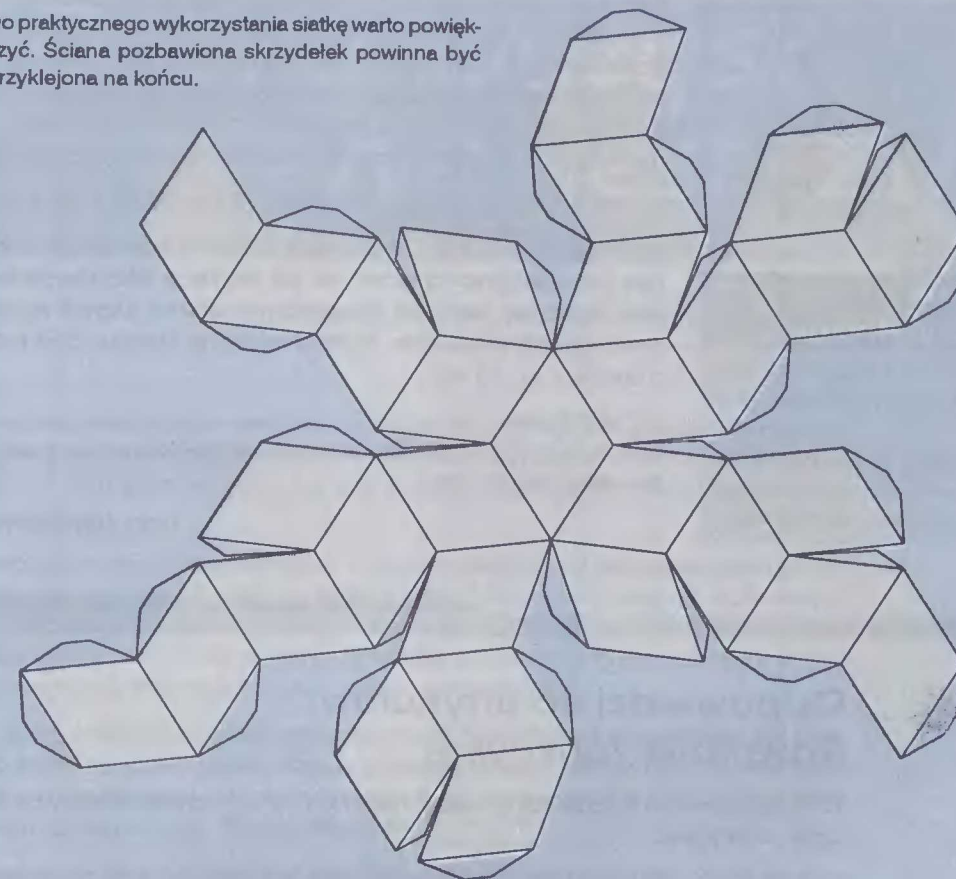
Zatem istotnie wszystkie trzy opakowania (przedstawione tutaj i poprzednim numerze) okazały się bryłami, których ściany są przystającymi rombami. Rodzi się więc naturalne pytanie – czy istnieją inne wielościany o tej samej własności?

Biorąc sześć dowolnych przystających rombów można zbudować z nich sześćościan. Z niektórych rombów można zbudować nawet dwa różne sześćościany. O rombach mówi się czasem, że to „kopnięte kwadraty”, podobnie sześćościany rombowe można uważać za „kopnięte sześciąny”. Jest ich nieskończenie wiele i same w sobie nie są szczególnie interesujące. Jeżeli zażądamy natomiast, by nasz rombościan miał więcej niż 6 ścian, to czeka nas spora niespodzianka. Oprócz odkrytych przez Keplera omówionych już dwunasto- i trzydziestościanu rombowego istnieją jeszcze tylko dwa inne rombościany o przystających ścianach. Liczba ich ścian wynosi 20 i 12, a ściany te w obu wypadkach są złotymi rombami.



Rys. 2

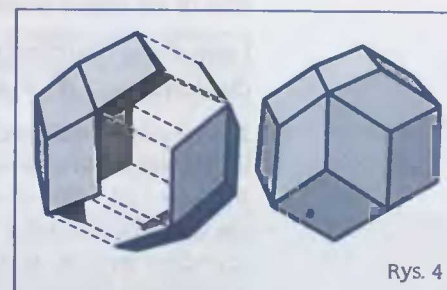
Do praktycznego wykorzystania siatkę warto powiększyć. Ściana pozbawiona skrzydełek powinna być przyklejona na końcu.



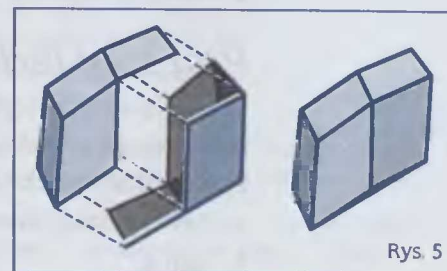
Rys. 3

Dwudziestościan rombowy został odkryty w 1885 r. przez rosyjskiego krystalografa J. S. Fiedorowa. Wielościan ten można otrzymać z 30-ścianu rombowego poprzez zabranie pasa dziesięciu rombów i połączenie ze sobą powstałych czasz (rys. 4). Do wykonania modelu można zatem wykorzystać fragmenty siatki z rysunku 3. Jak wykonać model, niech pozostanie zadaniem dla Czytelników.

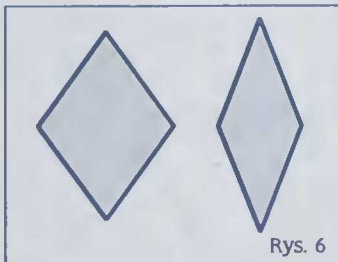
Na odkrycie czwartego rombościanu o przystających ścianach trzeba było czekać aż do 1960 r. Dokonał tego chorwacki matematyk S. Bilinski, który wykazał także, że inne wielościany o tej własności nie istnieją. Dwunastościan rombowy II rodzaju (zwany tak dla odróżnienia od 12-ścianu keplerowskiego, o którym pisaliśmy poprzednio) można otrzymać z 20-ścianu rombowego podobnie jak ten ostatni z 30-ścianu rombowego. Należy zabrać z niego pas 8 rombów i połączyć ze sobą powstałe części (rys. 5). Podobnie jak poprzednio znalezienie odpowiedniej siatki pozostaje jako zadanie domowe dla Czytelników.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zadania dla Czytelników

1. Ile krawędzi i wierzchołków ma każdy z opisanych rombościanów?
2. Które romby pozwalają na utworzenie dwóch różnych sześciokątów? Znajdź odpowiednie siatki.

A co z rombami o stosunku przekątnych wynoszącym $1:\sqrt{2}$? Co prawda (nie licząc sześciokątów) nie da się z nich samych zbudować innego rombościanu niż dwunastościan I rodzaju, ale tworzą one aż 60 z dziewięćdziesięciu ścian pięknego 90-ścianu rombowego. Jego zdjęcie znajdziecie na tylnej okładce tego numeru. Pozostałe jego ściany są rombami o stosunku przekątnych wynoszącym $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ($\approx 2,618$). Rys. 6 przedstawia oba rodzaje ścian tej ostatniej bryły. Wykonanie modelu z pojedynczych ścianek jest dość pracochłonne, ale jak zwykle w takich wypadkach efekt końcowy wart jest poczynionych starań. Użycie rombów o rozmiarach dwukrotnie większych niż na rysunku daje model o średnicy ok. 15 cm.

LITERATURA

W. W. R. Ball, H. S. M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, MacMillan, Dover 1960.

Piotr Pawlikowski

Odpowiedzi do artykułów: Równania funkcyjne

1. Biorąc dowolne a z dziedziny, mamy $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a$. $\frac{1}{a}$ również należy do dziedziny, mamy więc

$$f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a}.$$

Lewe strony obu otrzymanych równań są równe, więc $a = \frac{1}{a}$, co ma być spełnione dla dowolnego $a < 0$, a nie jest. Funkcja opisana w zadaniu zatem nie istnieje.

2. Pomnożmy obie strony równości przez $\sqrt{2}$. Otrzymamy $f(x+1)\sqrt{2} + f(x-1)\sqrt{2} = 2f(x)$ składniki te wyliczamy z warunku na f zastosowanego do $x+1$ i $x-1$ daje $(f(x) + f(x+2)) + (f(x-2) + f(x)) = 2f(x)$, skąd $f(x+2) + f(x-2) = 0$. Równość ta zachodzi dla wszystkich x , więc też dla $x+4$, co daje $f(x+6) + f(x+2) = 0$. Z obu ostatnich równości wynika, że dla każdego x zachodzi $f(x+6) = f(x-2)$, czyli że f jest okresowa o okresie 8.

Piszemy jedna za drugą...

1. Liczba ma 2893 cyfry. $500 = 9 + 180 + 103 \cdot 3 + 2$, więc pięćsetna jest cyfra dziesiątek sto czwartej liczby trzycyfrowej (czyli 0).
2. Cyfra dziesiątek drugiej trzycyfrowej liczby nieparzystej.
3. Cyfra jedności dwudziestego wystąpienia liczby 23.
4. Żadna.

Z notatnika starego belfra

Dobry wyzysk nie jest zły

Wykorzystywanie dziecka
jest tylko przyznaniem mu pełnych praw
Maciej Piotr Prus

Powyższe prowokujące i dwuznaczne motto zaczerpnięte jest z eseju zamieszczonego w „Przekroju” (nr 2919/2001) pt. *Dzieci wykorzystywać bezwzględnie*. Nie pojąłem od razu głębi tej myśli. Ale gdy zacząłem się nad tym dłużej zastanawiać, zrozumiałem...

Niewolników się **używa**, jak rzeczy. Innych podległych się **zatrudnia**, traktując ich także przedmiotowo. A kogo się **wykorzystuje**? Bogatych krewnych, wpływowych przyjaciół, zwykle ludzi wyższych od nas rangą, którzy stanowią **podmiot** naszych działań, mających na celu osiągnięcie założonych efektów. Wykorzystujemy innych dla osiągnięcia własnych korzyści. I właśnie o to chodzi!

Nie da się kształcić w szkole na świadomych obywateli ani niewolników, ani drżących przed seniorem wasali. Szkoła powstała bowiem dla uczniów. To uczniowie zatem, a nie nauczyciele (jak chcą zwiazki) ani nie wiedza (jak chcą inni) są **podmiotem** działań szkoły. Trudno uwierzyć?

Nawet dobry nauczyciel nie jest podmiotem w procesie nauczania. Dobry nauczyciel **wyzyskuje** uczniów. Ucząc ich, jednocześnie uczy się od nich, jak poprawić swoje nauczanie. Dobry nauczyciel nie potraktuje opowiadania o tym, jak to ktoś komuś coś tłumaczył tak długo, aż sam to zrozumiał, jako dowcipu. Jemu właśnie uczniowie często wskazują takie aspekty nauczanego tematu, jakich nigdy nie dostrzegali. I tak się nawzajem od siebie uczą. I czasem trudno zmierzyć, kto na tym więcej zyskuje. Kto kogo bardziej wyzyskuje...

Antoni Dindorf

Test Pałki

Franciszek Pałka – polonista, nauczyciel legnickiego liceum, któremu Legnica poświęciła jedną ze swoich ulic, fanatyk dobrej roboty (zwłaszcza w szkole). Gdy pełnił funkcję dyrektora, aby przekonać się, czy jakaś lekcja odpowiada jego kryteriom, nie odbywał tradycyjnych hospitacji, tylko dyskretnie obserwował, jak uczniowie wychodzili z lekcji na przerwę. Czy domyślasz się, jakie były dyrektorskie kryteria?

- | | | |
|--|---|--|
| ■ Lekcja wymaga myślenia i stałej koncentracji uwagi, stanowi 45 minut dobrej szkolnej roboty. | ⇒ | Uczniowie „eksplodują” z klasy na przerwę jeden przez drugiego, szukają zdrowego relaksu. |
| ■ Lekcja jest nudna, przetrwana często tylko dzięki grze w okręty. | ⇒ | Uczniowie przemieszczają się na przerwę pojedynczo lub małymi grupkami, „wyciekają” z klasy. |

Forum Czytelników

<http://www.atut.ig.pl/mmm>

Wielu Czytelników żywo zareagowało na wypowiedź naszego forumowicza w poprzednim numerze MMM dotyczącą informacji o sukcesach uczniów na zawodach matematycznych w mediach (a raczej ich chronicznego braku). Kontynuujemy ten temat.

Z ciekawością przeczytałam informacje z cyklu „Nasi górá” w ostatnim numerze. Ze wstydem muszę przyznać, że choć jestem nauczycielką matematyki, nic o naszych „narodowych sukcesach” w naukach ścisłych nie wiedziałam. A o Małyszu i strażakach słyszałam, chociaż nie jestem fanką ani skoków, ani sportów siłowych... (nauczycielka z Wałbrzycha)

O sukcesach polskiej drużyny w Mistrzostwach Świata w Programowaniu Zespołowym i o indywidualnym zwycięstwie Tomka Czajki doniosły chyba wszystkie media (co prawda w krótkich notkach i komunikatach), ale rzeczywiście o sukcesach w Olimpiadach Matematycznej i Fizycznej nie było ani słowa. O mistrzostwach w Paryżu też nie. Widać, że komputery to jednak biznes i duże pieniądze. Widocznie matematyka to temat mało medialny i źle się sprzedaje. Chociaż sukces to jednak sukces. (oczytany)

To nie tylko problem matematyki, ale wszystkich dziedzin trochę bardziej ambitnych od siłowania na rękę (niczego strażakom nie ujmując). Niedawno wybitny polski filozof prof. Leszek Kołakowski został laureatem nagrody im. Johna Klugego (nazywanej amerykańskim Noblem) za wybitne osiągnięcia na polu nauk humanistycznych i społecznych. Nagroda wynosiła milion dolarów! I też było o tym raczej cicho. (kiepski z matmy)

A może to nie wina dziennikarzy? Może sami matematycy nie dbają o nagłośnienie własnych sukcesów? Przecież trudno szukać takich informacji po omacku w serwisach lub Internecie. Wystarczyłoby, gdyby opiekunowie reprezentacji wysłali krótki anons do kilku redakcji, choćby mailem. Ale pewnie tego nie robią. (redaktor z Katowic)

Robią, robią. Przynajmniej niektórzy. Od kilku lat organizujemy popularne, masowe maratony matematyczne na szczeblu województwa (udział ok. 2500 osób). Wysyłamy informacje i zaproszenia do lokalnych mediów, ale jeszcze żaden „dziennikarz” się tym nie zainteresował. (MM)

Bo może źle się do tego zabieracie. W ogólnym rozrachunku nie liczy się temat, tylko dojścia i znajomości. Dyrektor naszego ogólniaka z byle zamieszania na boisku potrafi zrobić fakt medialny. Po prostu dzwoni do redakcji i tam informuje (swoich byłych uczniów), że należy zrobić taki a taki materiał. Nawet nasze matematyczne obozy naukowe są zawsze obszernie opisane w lokalnej gazecie. (Magda z JG)

Zadania konkursowe

Na nasz konkurs zadaniowy przychodzi coraz więcej rozwiązań. W systemie losowania nagród mogliśmy wyróżnić jednorazowo tylko 16 osób. W ten sposób wielu wytrwałych uczestników mogło być stale pomijanych. Chcąc zachęcić Czytelników do systematycznego rozwiązywania zadań konkursowych, redakcja postanowiła wprowadzić system, w którym wszystkie punkty będą skrupulatnie zbierane. Zmieniamy zatem regulamin konkursu. Postanowiliśmy wzorować się w nim na konkursie Lecha Pijanowskiego, który opisujemy w dziale „Z matematycznego łamusa”. Nie oznacza to bynajmniej rezygnacji z nagród pieniężnych. Postaramy się, by w miarę możliwości były one przyznawane na obecnie obowiązujących zasadach.

Regulamin „Konkursu zadaniowego” Magazynu Miłośników Matematyki

♦ W każdym numerze ogłaszanych jest 15 zadań konkursowych. Obejmują one łamigłówki matematyczne i logiczne, zagadki lateralne, rebusy oraz zadania analogiczne do tych, których rozwiązania pojawiają się w danym numerze (np. w *Samouczku zadaniowym*).

♦ Za przesłanie rozwiązań Czytelnik otrzymuje tyle punktów, ile wynosi liczba zaliczonych zadań. W każdym numerze można więc uzyskać od 0 do 15 punktów.

♦ Po uzbieraniu 33 punktów uczestnik konkursu uzyskuje tytuł *Eksperta Łamania Głowy*, co zostanie potwierdzone publikacją jego nazwiska na łamach MMM. Po trzykrotnym zdobyciu tego tytułu uzyskuje się tytuł *Mistrza Łamania Głowy* potwierdzony specjalnym dyplomem. Trzykrotne zdobycie tytułu *Mistrza* skutkuje przyznaniem tytułu *Arcymistrza Łamania Głowy*, co potwierdzone zostanie specjalną odznaką wraz z legitymacją.

♦ Ranking uczestników konkursu dostępny będzie w niedługim czasie na stronie internetowej MMM <http://www.atut.ig.pl/mmm>.

♦ Redakcja postanawia wliczyć do puli konkursowej wszystkie punkty zdobyte przez Czytelników od początku ukazywania się czasopisma.

Informujemy, że w ubiegłym roku najwięcej punktów na koncie zgromadzili:

- ♦ Dariusz CHUDZIA, Wrocław (34);
- ♦ Mateusz LEWARTOWSKI, Dębica (27);
- ♦ Sabina JANECKA-MASTALERZ, Zielona Góra (26);

kterzy otrzymują od nas zestawy modeli brył firmy Pedagoguery Software.

Dochowaliśmy się już także pierwszego *Eksperta Łamania Głowy*. Został nim Pan Dariusz CHUDZIA z Wrocławia.

Gratulujemy!



1. W smaźalni

Za pomysły zadań wykorzystanych w tym numerze dziękujemy:

Krzysztofowi Ciesielskiemu,

Łukaszowi

Goliszewskiemu,

Augustynowi

Kałuży,

Dorocie

Kolany,

Piotrowi

Olszowcowi,

Piotrowi

Pawlikowskiemu,

Rościławowi

Rabczukowi,

Tadeuszowi

Ramsowi,

Ryszardowi

Rudnickiemu,

Adamowi

Smólskiemu.

W celu przyrządzenia kotleta trzeba smażyć go na obu stronach po minucie. Ile czasu potrzeba i wystarcza, żeby usmażyć 3 kotlety, mając do dyspozycji 2 patelnie, na których mieści się po jednym kotlecie?

2. Zegar ze sznurka

Mamy do dyspozycji sznurek i źródło ognia. Sznurek spala się w ciągu godziny, ale wykonany jest z niejednorodnego materiału i jedno jego fragmenty palą się szybciej, a inne wolniej. Jak odmierzyć 30 minut, nie używając niczego więcej?

3. 100 lat!

W grudniu ubiegłego roku minęło 100 lat od przyznania nagrody Nobla Marii Skłodowskiej-Curie. Rozwiąż nasz specjalny rocznicowy kryptarytm. Różnym literom odpowiadają różne cyfry i na odwrót.

MARIA
+ CURIE

RADIUM

4. Raz-dwa-trzy

Ile jest pięciocyfrowych liczb podzielnych przez 3, które nie mają cyfr innych niż 1, 2 i 3?

5. O pisarczyku

Pisarczyk napisał jedna za drugą kolejne liczby naturalne zaczynając od 1, a kończąc na 100. Jaką cyfrę napisał jako sto pięćdziesiątą pierwszą?

6. Dziecinna zagadka

Oto listy, które wymienili ze sobą dwaj „łamacze głowy”:

Drogi kolego Abacki!

Zapytałem Cabackiego, ile lat mają jego dwaj synowie. Odpowiedział mi, że Antoni ma mniej niż dziesięć lat i ma co najmniej tyle lat, ile ma Bolesław, który ma co najmniej dwa lata. Dodał, że iloczyn ich lat daje wiek mego syna Czesława, suma zaś ich lat daje wiek Twego syna Damiana. To mi nie wystarczy, muszę wiedzieć, ile lat ma Damian. Prawdę mówiąc, nie miałem pojęcia, że masz syna.

Twój Babacki.

Drogi kolego Babacki!

To mi też nie wystarczy, muszę wiedzieć, ile lat ma Czesław. Też nie miałem pojęcia, że masz syna.

Twój Abacki.

Drogi kolego Abacki!

Wciąż jeszcze za mało mam danych, jednak koniecznie muszę wiedzieć, ile lat ma Damian.

Twój Babacki.

Drogi kolego Babacki!

Dla mnie także wciąż jeszcze danych jest za mało, jednak koniecznie muszę wiedzieć, ile lat ma Czesław.

Twój Abacki.

Drogi kolego Abacki!

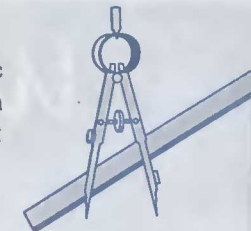
Dziękuję – teraz już wiem wszystko. Miałem wrażenie (dopóki Twój ostatni list go nie rozproszył), że Antoni jest starszy, niż naprawdę jest.

Twój Babacki.

Ile lat mają Antoni i Bolesław Cabaccy, Czesław Babacki i Damian Abacki?

7. Skąpstwo kreślarza

Za każdorazowe użycie linijki (tzn. za poprowadzenie jednej linii) trzeba zapłacić 2 zł, za każde użycie cyrkla (tzn. narysowanie okręgu lub jego łuku) – 5 zł, a za każdą zmianę jego rozwartości – 1 zł. Jak najtaniej skonstruować odcinek o długości $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$? Dany jest odcinek jednostkowy, a cyrkiel jest na początku zwarty.



8. Ence-pence

Małgosia ma w jednej ręce parzystą, a w drugiej nieparzystą liczbę monet. Aby zgadnąć, w której ręce jest parzysta liczba monet, Mikołaj każe jej pomnożyć przez 2 liczbę monet w prawej ręce, dodać wynik do liczby monet w lewej ręce i podać mu sumę. Objaśnij, na czym polega metoda Mikołaja?

9. Równanie funkcyjne

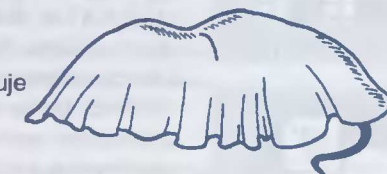
Wykaż, że jeśli funkcja f , różna od stałej, spełnia równanie $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{3} f(x)$, to jest okresowa. Jaki jest jej okres?

10. O pisarczyku i skreślaczu

Pisarczyk napisał kolejno jedna za drugą liczby naturalne od 1 do 60. Następnie skreślacz skreślił 100 cyfr tak, aby liczba utworzona z pozostałych cyfr była możliwie największa. Jaka to liczba?

11. Co za dydelf!

Jeśli pies kosztuje 12 zł, kot 9 zł, a niedźwiedź 30 zł, to ile kosztuje dydelf?



12. Feralna klasówka

Dwóch uczniów otrzymało na osobnych kartkach identyczne działanie do wykonania. Jeden z nich otrzymał wynik o 2277 większy niż drugi, chociaż żaden nie popełnił błędu. Jak to możliwe?

13. Forsowny anagram

Zawodnik pobiął forsownie 4 km i bardzo się zmęczył, ale po krótkim odpoczynku pokonał dłuższą trasę! Ile kilometrów liczyła ta trasa? Odpowiedź jest anagramem treści zadania.

14. Na bocznicy

Czy wagon kolejowy po załadunku może być lżejszy od pustego?

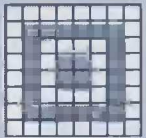
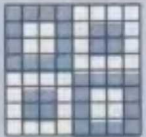
15. Nogi, nogi, nogi...

Dwie nogi siedziały na trzech nogach przy czterech nogach nad jedną nogą, gdy przyszły cztery nogi i ukradły jedną nogę, po czym dwie nogi podniosły trzy nogi, rzuciły je w cztery nogi i zabrały jedną z powrotem. Co się właściwie stało?

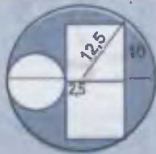


Wyniki i odpowiedzi

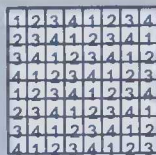
Rozwiązania zadań konkursowych z numeru 3/2003



Rys. 1

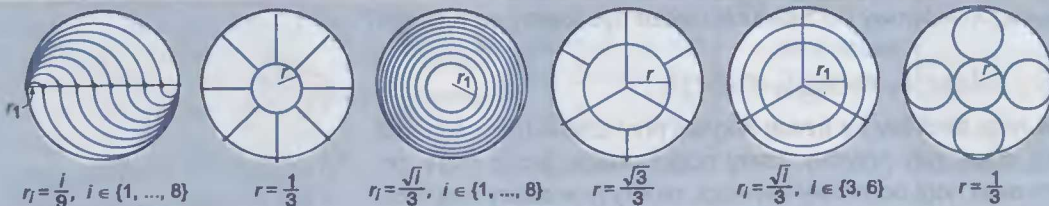


Rys. 2



Rys. 3

1. Malowanie szachownicy. Trzy przykładowe rozwiązania przedstawia rys. 1. 2. W kinie. 39 osób. 3. Podział prostokąta. Na nieskończenie wiele sposobów (dowolną prostą przechodzącą przez środek prostokąta). 4. Imieniny. Alicja-Hubert, Barbara-Gerwazy, Czesław-Edward, Dorota-Franek. 5. Wycinanki. Wykonując odpowiednie rachunki można sprawdzić, że możliwy jest układ jak na rys. 2. 6. Same jedyńki. Po wstawieniu plusów i minusów działanie obcięte do 2, 4, 6, ..., 2002 jedynek będzie miało zawsze parzysty wynik, więc całe działanie da wynik nieparzysty. Zatem nie można uzyskać wyniku 100. 7. Rodzina, ach, rodzina. Syn rodziców będących rodzeństwem rodziców drugiego chłopca będzie jego podwójnym kuzynem (bratem ciotecznym i stryjecznym). 8. Wysokogórska wyprawa. Przyjaciele nie mówili prawdy. Z warunków zadania mamy $A = 0,4(B + C)$, $B = 0,5(A + C)$, $C = 0,6(A + B)$. Dodając te równania stronami i redukując wyrazy podobne otrzymujemy $A = C$, co wobec drugiego równania daje też $A = B$. To jednak jest sprzeczne z pierwszym i trzecim równaniem. 9. Płytki na szachownicy. Nie da się. Jeśli pokolorujemy całą szachownicę jak na rys. 3 (numery oznaczają różne kolory), to płytka o wymiarach 1×4 w dowolnym położeniu musi pokrywać pola wszystkich kolorów. Gdyby dało się pokryć szachownicę z wyciętymi rogami, to musiałoby być na niej tyle samo pól w każdym kolorze, a tak nie jest (bo jest tak na szachownicy bez wyciętych rogów i dwa usuwane rogi są w tym samym kolorze). 10. Zaprzyjaźnione miesiące. Sytuacja opisana w zadaniu jest możliwa tylko w roku przestępnym. Wtedy tym samym dniem zaczynają się styczeń, kwiecień i lipiec, a w roku następnym – wrzesień i grudzień. W roku nieprzestępnym tym samym dniem tygodnia zaczynają się co prawda luty, marzec i listopad, ale wtedy w następnym roku tym dniem rozpoczyna się tylko jeden miesiąc (maj, jeśli ten rok jest przestępny, a sierpień, jeśli nie). 11. Sprawiedliwy podział. Konstrukcyjny podział kąta pełnego na 9 równych części jest niewykonalny. Częsty błąd polegał na dzieleniu na 3 równe części cięciwy, na której opiera się kąt środkowy o mierze 60° , a nie łuku okręgu, na którym opiera się ten kąt. Przykłady poprawnych rozwiązań przedstawia rys. 4 ($R = 1$).



Rys. 4

12. Głoskowa łamiągłowa. Należało wstawić „trzynaście”. Spółgłoska jest spółgłoską, zatem w tym słowie spółgłoski to m.in. „rz” oraz „ć” (miękkie „c”). W słowie tym nie ma głoski „i”, litera ta oznacza tylko zmiękczenie. 13. Gra w berety. Wszystkie berety były zielone, ponieważ gdyby tylko jeden był zielony, jego właściciel wiedziałby o tym już w pierwszej rundzie (widząc przed sobą dwa czerwone), a gdyby zielone były dwa berety, ich właściciele wiedzieliby o tym w drugiej rundzie (każdy z nich, widząc przed sobą w I rundzie beret zielony i czerwony, nie wiedziałby, jaki ma na głowie, ale gdyby miał mieć czerwony, to właściciel drugiego zielonego musiałby zobaczyć dwa czerwone w I rundzie i odpowiedzieć, że już wie, a tego nie zrobił). Przy trzech zielonych beretach w I rundzie właściciel zielonego widzi dwa zielone i nie wie, jaki ma, jednak gdyby miał czerwony, to właściciel któregoś z zielonych wiedziałby o tym w II rundzie (jak w poprzednim przypadku). Skoro w II rundzie nikt tego nie wiedział to dopiero w III rundzie właściciel zielonego dowiaduje się, że ma beret zielony. 14. Do kanału. Pokrywa okrągła nie wpadnie do otworu o takiej samej średnicy, a inne mogą. 15. Podział sześcianu. Wiele osób udzieliło odpowiedzi 24, nie zauważając, że ściany doklejanych ostrosłupów leżą parami w tych samych płaszczyznach. W każdym z tych ostrosłupów jego góry wierzchołek, środek podstawy i środek krawędzi podstawy tworzą prostokątny trójkąt równoramienny, więc każde dwa odcinki łączące górne wierzchołki doklejanych ostrosłupów ze środkiem ich wspólnej krawędzi leżą na jednej prostej. Stąd wniosek, że każda krawędź sześcianu należy do jednej ściany otrzymanej bryły. Jest ich więc 12 (i są przystającymi rombami). Otrzymana bryła to dwunastościan rombowy.

Wyniki konkursu z numeru 3/2003

Tym razem zadania okazały się dość trudne, chociaż po raz pierwszy w dziejach konkursu otrzymaliśmy prace z 15 poprawnymi rozwiązaniami. Nagrody pieniężne otrzymują (w nawiasie podajemy liczbę zaliczonych zadań):

200 zł – Michał KOPIŃSKI, Wrocław (15);

100 zł – Marcin MAŁOGROSZ, Słupsk (14); Bernard ORZECOWSKI, Gęsiniec (12); Anna SAWICKA, Olszewnik (12); Tomasz KOZAKIEWICZ, Warszawa (11); Grzegorz DOBEK, Ostrołęka (10);

50 zł – Ludwika **GORZKOWSKA**, Łódź (14); Barbara **LICHOWSKA**, Nowy Sącz (13); Daniel **WIDOMSKI**, Wrocław (12); Łukasz **GOLISZEWSKI**, Żelechów (12); Edward **PYPNO**, Katowice (10); Michał **SZKODZIŃSKI**, Toruń (7); Anna **LAMPERSKA**, Wrocław (6); Amelia **MICHALAK**, Jelenia Góra (6); Justyna **GIL**, Zgierz (5); Janusz **TARCZYKOWSKI**, Toruń (5).

Nagrody książkowe za rozwiązania *Zadań dla Czytelników* z artykułów: „Nudna matematyka”, „Pierwsze? Absolutnie!” i „Krewni stelli” otrzymują: Barbara **DARGACZ**, Gdańsk; Łukasz **GOLISZEWSKI**, Żelechów; Sabina **JANECKA-MASTALERZ**, Zielona Góra.

Rozwiązania z numeru 4/2003

Zadania z Finału Międzynarodowych Mistrzostw w GMIŁ

Zamazane symbole. Rys. 1. Układanka. Jedną z trzech możliwości przedstawia rys. 2. Przygotowanie bankietu. 14 dzieci. Geometryczny spadek. 240 m. Tajny kod. Jest 7 rozwiązań: 405, 2025, 6075, 10125, 30375, 50625, 70875. Zagubiony w lesie. 79,3 km², p. artykuł *Wirujące trójkąty* s. 19. Przemieszczenia na siatce. Z jako 26 litera alfabetu łacińskiego ma współrzędne (514227, 317810).



Rys. 1



Rys. 2

ALE KLAPA!

Przy okazji zadania o kanałowej klapie nasi Czytelnicy donieśli, że choć studzienki kanalizacyjne istotnie są okragłe, to już studzienki telekomunikacyjne bywają prostokątne. Chociaż i wśród studzienek kanalizacyjnych zdarzają się wyjątki. Zdjęcia pokryw kanałowych z Teheranu przesłali nam państwo Anna i Przemysław Kiciakowie z Warszawy. *Dziękujemy.*



lista nagrodzonych
w następnym
numerze.

Zadania z artykułu I co dalej?

Zad. 1. a) Określmy ciąg $\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, gdzie F_n to liczby Fibonacciego $n \in \mathbb{N}$. Liczba złota Φ spełnia (co łatwo sprawdzić) zależność $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, natomiast ciąg φ_n spełnia: $\varphi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\varphi_n}$. Stąd można nietrudno sprawdzić, że liczby φ_n są na zmianę mniejsze i większe od Φ , a następnie (osobno dla indeksów parzystych i nieparzystych), że są coraz bliższe tej wartości. Zbieżność ta jest bardzo szybka. Już dla $\varphi_9 = \frac{F_{10}}{F_9}$ błąd jest mniejszy od 0,1%. **b)** W prosty sposób, analizując reszty z dzielenia przez 8 wyrazów F_n , można zauważyć, że kwadratami nie mogą być F_n dla n dających przy dzieleniu przez 12 reszty 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10. Później (ale już trudniej) wykazuje się, że kwadraty mogą znajdować się tylko wśród liczb F_1 i F_{12k} . Na koniec pokazuje się, że jedynym kwadratem wśród liczb tej ostatniej postaci jest $F_{12} = 144$. Po szczegóły odsyłamy do elementarnego artykułu J. H. E. Cohna, *On Square Fibonacci Numbers*, Journal London Math. Soc. 39 (1964).

Zad. 2. Za pierwszy i drugi wyraz przyjmujemy 2 i 3. Jako kolejne wyrazy ciągu dopisujemy kolejne cyfry iloczynów dwóch poprzednich wyrazów. **a)** Ponieważ z dwóch początkowych liczb tylko jedna jest nieparzysta, najwyżej co druga cyfra może być nieparzysta, ponieważ iloczyny są parzyste i najwyżej dwucyfrowe. **b)** Piątka w tabliczce mnożenia pojawia się tylko w iloczynach liczb kończących się na piątki oraz szóstki i dziewiątki a także siódemki i ósemki. Zatem aby w ciągu znalazła się piątka, wcześniej musiałaby wystąpić w nim piątka, siódemka lub dziewiątka. Podobnie dla siódemki i dziewiątki. Skoro wśród początkowych dwóch wyrazów tych liczb nie ma, nie wystąpią w ogóle.

Zad. 3. W czwartym wyrazie ciągu występują dwa takie układy – 1011 i 0110. Z pierwszego z nich przez zastępowanie cyfr (definicja A) powstaje zawsze układ 1011010, a z drugiego – 110101. Mamy więc w piątym wyrazie następujące układy 4-cyfrowe: 1011, 0110, 1101, 1010 i 0101. Należy jeszcze rozpatrzyć powstałe trzy nowe układy: 1101, 1010 i 0101. Analogicznie dadzą one zawsze tylko otrzymane już wcześniej 4-cyfrowe układy zer i jedynek.

Zadania z artykułu Opakowania

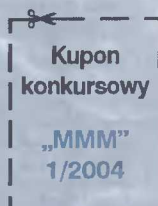
1. Dwunastościan rombowy ma 14 wierzchołków i 24 krawędzie. 2. Jest to część wspólna kompozycji sześciianu i ośmiościanu foremnych. Ma 14 ścian (6 kwadratowych i 8 trójkątnych – rys. 1). 3. Żadna. 4. Przestrzeń można oczywiście wypełnić graniastopami, których podstawy parkietują płaszczyznę. Poza tym piękne wypełnienie daje ośmiościan ścięty (tj. ośmiościan foremny z narożami ściętymi w taki sposób, aby ściany powstałej bryły były kwadratami i sześciokątami foremnymi – rys. 2). Inną bryłę wypełniającą przestrzeń opiszemy dokładniej w jednym z najbliższych numerów MMM, a kilka jeszcze innych opisanych jest w witrynie http://www.queenhill.demon.co.uk/polyhedra/five_sf/five.htm (artykuł jest po angielsku, ale są w nim zamieszczone siatki opisanych tam brył).



Rys. 1



Rys. 2



Wśród Czytelników, którzy do końca marca 2004 nadesłali na adres redakcji prawidłowe rozwiązania zadań konkursowych rozlosujemy nagrody.

Główna nagroda (za rozwiązanie przynajmniej 12 zadań) – **200 zł**,

5 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 10 zadań) – po **100 zł**,

10 nagród (za rozwiązanie przynajmniej 5 zadań) – po **50 zł**.

Na kopertę prosimy nakleić kupon konkursowy.

Punkty patronackie prowadzące sprzedaż numerów archiwalnych MMM

Kiosk w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
ul. Reymonta 4, 30-059 **Kraków**
tel. (0-12) 632 48 88 w. 5723

Księgarnia Pedagogiczna Łódzkiego Stowarzyszenia Pomocy Szkole
ul. Wólczańska 202, 90-531 **Łódź**
tel. (0-42) 636 83 26

Sądecki Oddział Polskiego Towarzystwa Matematycznego
ul. Jagiellońska 61, 33-300 **Nowy Sącz**
tel. (0-18) 443 68 99

Biuro Handlowe Wydawnictwa NOWIK
ul. Katowicka 39, pok. 110, 45-056 **Opole**
tel. (0-77) 454 36 04

Książki i Pomoce Dydaktyczne Marek Matejuk
ul. Wrocławska 45, 58-309 **Wałbrzych**
telefon, faks (0-74) 843 43 09, (0-74) 849 06 90
e-mail: sklep@matejuk.pl, witryna internetowa: www.matejuk.pl

Kiosk na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Banacha 2, 02-097 **Warszawa**
tel. (0-22) 55 44 136

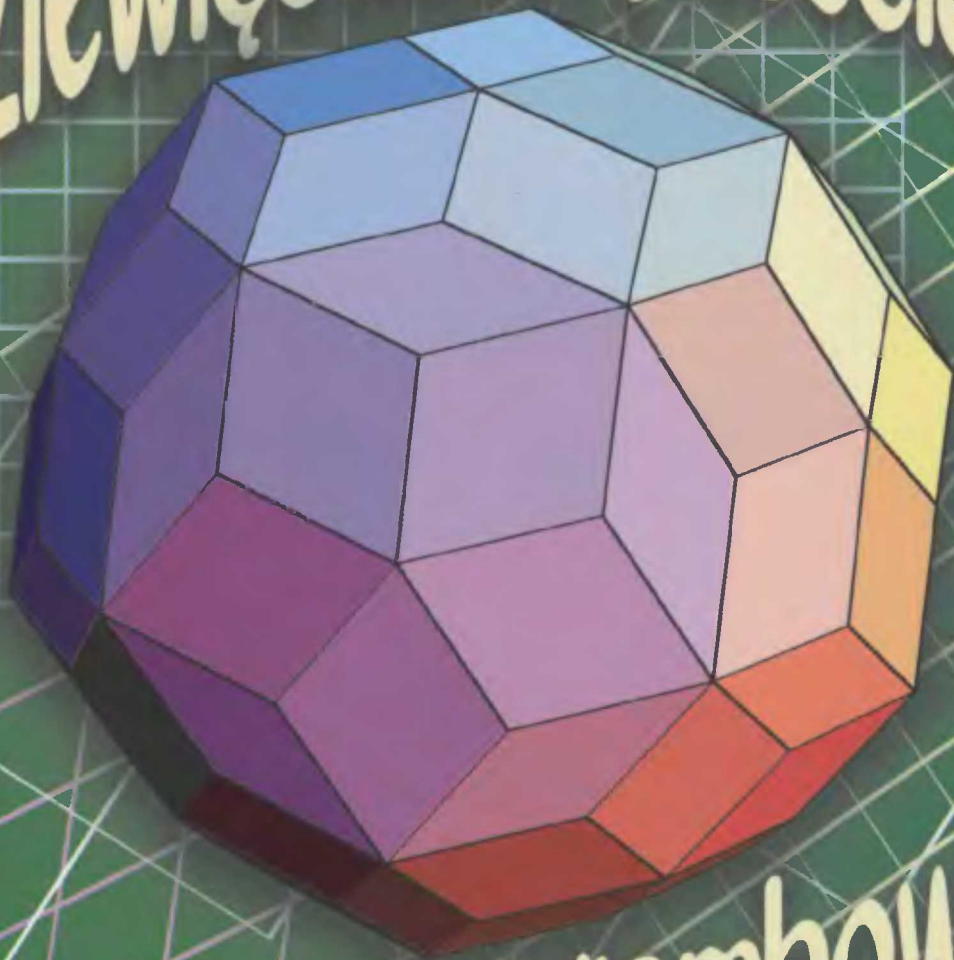
Kiosk w Gmachu Głównym Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 **Wrocław**
tel. (0-71) 320 28 61

Księgarnia KWANTUM
ul. Świdnicka 6a, 50-067 **Wrocław**
tel. (0-71) 342 04 20, e-mail: kwantum@beta-fk.pl

Księgarnia przy DODN
ul. Dawida 1A, 50-527 **Wrocław**
tel. (0-71) 336 99 74

Punkt ksero w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 **Wrocław**
tel. (0-71) 375 74 14 (prosić ksero)

dziewięćdziesięciościan



rombowy

ISSN 1643-9481



Czytaj w dziale
„Zrób sobie bryłkę” s. 32.